

Agnieszka Pfeiffer

Konstruktywizm i metody aktywizujące w edukacji matematycznej dzieci starszych i młodzieży

- ✓ Konstruktywizm w edukacji matematycznej
- ✓ Wskazówki metodyczne: motywowanie i angażowanie uczniów w uczenie się matematyki
- ✓ Przykłady zadań i sytuacji ilustrujące konstruktywistyczne podejście do nauczania – uczenia się matematyki
- ✓ Konstruktywistyczne podejście do nauczania matematyki w szkole



Analiza merytoryczna
Elżbieta Miterka

Recenzja
Jolanta Lazar

Redakcja językowa i korekta
Monika Lipińska-Pawełek

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoly ćwiczeń”
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65967-00-8 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)

ISBN 978-83-65967-11-4 (Zestaw 3: Aktywizacja i ocenianie w edukacji matematycznej w klasach IV–VIII szkoły podstawowej i szkole ponadpodstawowej)

ISBN 978-83-65967-12-1 (Zeszyt 1: Konstruktywizm i metody aktywizujące w edukacji matematycznej dzieci starszych i młodzieży)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Publikacja jest rozpowszechniana na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Użycie niekomercyjne 3.0 Polska (CC-BY-NC).

Spis treści

Wstęp	3
Konstruktywizm w edukacji matematycznej	4
Wskazówki metodyczne: motywowanie i angażowanie uczniów w uczenie się matematyki	7
Rodzaje metod nauczania	7
Metody aktywizujące	8
Przykłady metod aktywizujących	10
Przykłady zadań i sytuacji ilustrujące konstruktywistyczne podejście do nauczania – uczenia się matematyki	18
Przykład 1. Porównywanie ułamków zwykłych	18
Przykład 2. Objętość prostopadłościanu	19
Przykład 3. Strategie odejmowania pamięciowego	20
Przykład 4. Strategie rozwiązywania zadań tekstowych	21
Przykład 5. Strategie rozwiązywania zadań zamkniętych	26
O stawianiu celów	32
Nauczyciel konstruktywista	33
Konstruktywistyczne podejście do nauczania matematyki w szkole	35
Na zakończenie	37
Dowiedz się więcej	39
Bibliografia	39
Spis tabel	40



Wstęp

Przez wiele wieków rola szkoły w zdobywaniu wiedzy była niezaprzeczalna. Miało to zasadniczy wpływ na spostrzeganie wiedzy pedagogicznej i merytorycznej nauczyciela, wiedzy ucznia oraz komunikacji w klasie. Działania nauczyciela koncentrowały się na przyswajaniu przez uczniów określonej porcji wiadomości, ustalonych znaczeń. Zakładano, że uczeń nabywa wiedzę przede wszystkim poprzez świadomą aktywność nauczyciela kierowaną wytycznymi oficjalnych programów szkolnych (Klus-Stańska, 2002).

Zmiany w teoriach edukacji spowodowały inne spostrzeganie wiedzy nauczyciela, procesu uczenia się, komunikowania się nauczyciela z uczniami oraz samych uczniów. Obecnie podkreśla się społeczny charakter uczenia się.

Powszechny dostęp do internetu przesunął środek ciężkości uczenia się z edukacji formalnej na nieformalne uczenie się. To zaś zasadniczo zmieniło rolę wiedzy osobistej ucznia w procesie nauczania – uczenia się. I oczywiście tym samym rolę nauczyciela, który bardziej organizuje ten proces, poszukuje dróg budowy nowych znaczeń na dotychczasowej, często nieformalnej, wiedzy i doświadczeniu pozaszkolnym ucznia, pozwala na odkrywanie, poszukiwanie, dyskutowanie.

W niniejszej publikacji przedstawione jest, po krótko, konstruktywistyczne podejście w edukacji matematycznej, jego wpływ na organizację pracy w klasie oraz zmiany w procesie uczenia się.

Drugi rozdział zawiera konkretne przykłady sytuacji pozwalającej na odkrywanie pojęć matematycznych oraz wykorzystywanie różnych strategii do rozwiązywania zadań.

Zaangażowanie ucznia we własne uczenie się jest możliwe, gdy rozumie on nie tylko czego, ale i po co ma się nauczyć. To wymaga od nauczyciela dużej wiedzy merytorycznej, rozumienia struktury nauki matematycznej, znajomości zastosowań matematyki. A przede wszystkim umiejętności mówienia o tych zagadnieniach do uczniów. Tym zagadnieniom poświęcony jest rozdział trzeci.

Rozdział czwarty pokazuje, jak w teorii edukacji spostrzegana jest nowa rola nauczyciela. W ostatnim rozdziale przedstawiono propozycję działań związanych z konstruktywistycznym podejściem do edukacji matematycznej w szkole ćwiczeń.

Na zakończenie zaproponowano różne źródła, po które warto sięgnąć, interesując się konstruktywizmem w edukacji.

„Uczenie się jest czymś, co odbywa się między ludźmi.
To nie intelekt uczy inny intelekt – to ludzie uczą ludzi”.

(C. R. Christiansen, 2008)



Konstruktywizm w edukacji matematycznej

Edukacja matematyczna ma ogromną wartość w poznawaniu otaczającego nas świata. Wiele badań wskazuje na jej znaczenie w rozwoju intelektualnym młodych ludzi. Czy w dzisiejszej szkole uczniowie mogą aktywnie i odpowiedzialnie rozwijać swoje kompetencje matematyczne? Czy też, w pogoni za wynikami egzaminów zewnętrznych, zarówno nauczyciele, jak i ich uczniowie zgubili radość z odkrywania matematyki?

Pojęcia i symbole matematyczne można wprowadzać na dwa sposoby:

- wprowadzamy (podajemy) nowe pojęcie lub symbol – podajemy definicję, a następnie szukamy przykładów, które pomogą uczniowi zrozumieć sens i przydatność tego pojęcia lub symbolu;
- stworzymy sytuację, dzięki której uczniowie poznają sens i użyteczność nowego pojęcia i symbolu, a następnie wprowadzamy to pojęcie lub symbol.

Pierwszy opisany sposób wywodzi się z behawioryzmu, jest utożsamiany z tradycyjnym nauczaniem matematyki. Drugi sposób związany jest z podejściem konstruktywistycznym.

Konstruktywizm jest obecnie najbardziej znaczącym nurtem w edukacji. Określa na nowo relacje między nauczycielem i uczniem. Stawia na aktywnego ucznia, świadomego tego, czego i po co się uczy, oraz nauczyciela organizującego mu środowisko uczenia się.

Pedagogika konstruktywistyczna wyrasta z doświadczeń psychologii poznawczej i społecznej psychologii rozwojowej człowieka. Uczenie się jest konstruowaniem własnych struktur wiedzy przez uczącego się, nie jest natomiast przyswajaniem gotowych treści czy algorytmów.

Według teorii konstruktywizmu, umysł tworzy wiedzę w postaci obrazów, pojęć, sądów i emocji. Dlatego tak ważna jest dobra atmosfera uczenia się, stawiająca ucznia w centrum tego procesu, oraz jego motywacja wewnętrzna.

„Konstruktywizm (...) nawołuje do oparcia nauczania na eksperymentowaniu, negocjowaniu, prowadzeniu eksploracyjnych rozmów, odkrywaniu osobistych znaczeń, poszukiwaniu i rozwijaniu uczniowskich pomysłów, a więc podejmowaniu różnorodnych form aktywności poznawczej” (Michalak, Misiorna, 2003).

Inną podstawę teoretyczną przyjmowania w edukacji modelu konstruktywistycznego stanowi przekonanie, że wiedza jest dzisiaj tak złożona, iż nauczyciel nie może w sensie ścisłym „nauczać” – może jedynie wspierać poszukiwanie wiedzy przez studentów czy to indywidualnie, czy też w ramach pracy grupowej. I choć dotyczy to w mniejszym stopniu matematyki szkolnej, jednak wymaga akceptacji przez nauczyciela całej wiedzy nieformalnej uczniów, zdobywanej poza szkołą i programem nauczania.



Opisując konstruktywistyczne podejście do procesu nauczania – uczenia się zawsze podkreśla się, że **zaangażowanie i aktywność ucznia są kluczowymi założeniami w planowaniu i realizacji zajęć szkolnych**. Uczeń powinien być świadomy swojego procesu uczenia się, być odpowiedzialny za to, co robi, umieć uczyć się i rozumieć swój wkład w kształtowanie własnego sukcesu w szkole.

W procesie konstruowania swojej wiedzy i dochodzenia do zrozumienia uczeń wykorzystuje wiedzę zdobytą w codziennych życiowych doświadczeniach i w szkole. Przygotowując zajęcia, w trakcie których uczeń poznaje nowe pojęcia, symbole czy procedury, nauczyciel powinien odwoływać się do tych dwóch obszarów doświadczeń.

Niezwykle ważny jest fakt, że uczenie się ma charakter społeczny – jest procesem interakcji ucznia ze światem, z innymi ludźmi i z samym sobą. Klasa jest wspólnotą osób uczących się; uczeń jest aktywny, gdy nawiązuje kontakty partnerskie, współdziała w poszukiwaniu wiedzy, w nadawaniu znaczeń i konstruowaniu sensu poznawanych treści, wyraża przy tym swoje myśli i uczucia, stara się zrozumieć innych i korzysta z ich zasobów wiadomości. Dlatego tak ważne jest organizowanie w trakcie zajęć pracy w grupach, przede wszystkim w grupach niejednorodnych (Por. Bałachowicz, 2003). Badania wskazują, że interakcje między uczącymi się zwiększają efektywność uczenia się. Podwyższają motywację ucznia, a także pozwalają na „konfrontację” jego wiedzy z poglądami innych. Praca w grupach daje ponadto uczniom większe poczucie bezpieczeństwa. Łatwiej jest powiedzieć rówieśnikowi: „poczekaj, nie rozumiem, powiedz to jeszcze raz”, niż nauczycielowi, na forum całej klasy.

Oczywiście takie konstruktywistyczne podejście do poznawania nowych pojęć/symboli/procedur jest tylko jednym z licznych aspektów edukacji matematycznej. Po nim musi nastąpić etap weryfikacji uczniowskich odkryć, ocena dokonywana przez nauczyciela, utrwalenie zrozumienia, poznanie różnorodnych zastosowań pojęcia/symbolu/procedury.

Proces dochodzenia do odkrycia w klasie ma zapoznawać uczniów z metodami pracy naukowej, czyli sposobami odkrywania.

Prowadzone przez prof. Dorotę Klus-Stańską badania nad konstruowaniem znaczeń podsumowują taki styl pracy nauczyciela.

Obserwacje dotyczące relacji między wiedzą osobistą i publiczną w warunkach edukacji opartej na konstruowaniu znaczeń pozwalają sformułować kilka wniosków. Wiedza osobista ucznia może być lokowana w szkolnej edukacji jako pełnoprawna poprzez zastosowanie różnorodnych działań nauczyciela (Klus-Stańska, 2002):

**Akceptacja wiedzy osobistej ucznia:**

- wyprzedzanie prezentacji wiedzy publicznej przez aktywizację wiedzy osobistej uczniów („powiedz pierwszy, co o tym myślisz”),
- tworzenie okazji do dzielenia się przez uczniów swoimi doświadczeniami dotyczącymi tak świata społecznego, jak przyrodniczego („opowiedz o tym, co wiesz/myślisz na ten temat”),
- respektowanie umiejętności ucznia nabytych poza szkołą („wykorzystaj to, co już umiesz”).

Eksploracja wiedzy osobistej ucznia:

- czynienie z tych doświadczeń przedmiotu rozbudowanego namysłu w klasie („przemyśl to na nowy sposób”),
- odnoszenie czynności podejmowanych w klasie do sytuacji pozaszkolnych („badaj swój własny świat pozaszkolny”).

Nabywanie nowych znaczeń osobistych w szkole:

- stymulowanie myślenia hipotetycznego („działaj na próbę”),
- zgoda na popełnianie błędów („nie błądzi tylko ten, kto nie szuka”),
- zaufanie do kompetencji ucznia, przejawiające się m.in. w pozostawianiu choćby części jego pracy poza bezpośrednią kontrolą i kierowaniem przez nauczyciela, np. indywidualne notatki, praca w małych zespołach („radź sobie tak, jak potrafisz”).

Jaka jest praktyka? Z prowadzonych m.in. przez Instytut Badań Edukacyjnych badań wynika (Por. Karpiński, Grudniewska, Zambrowska, 2013), że przy wprowadzaniu nowych treści matematycznych nauczyciele wciąż zazwyczaj stosują wykład lub pogadankę. Mimo ich deklaracji, że pracują metodami aktywnymi i zachęcają uczniów do czynnego udziału w zajęciach, według uczniów styl prowadzenia lekcji matematyki przebiega zgodnie ze schematem:

- sprawdzanie pracy domowej,
- wprowadzenie przez nauczyciela nowych pojęć albo rozwiązywanie przez nauczyciela przykładowych zadań na tablicy,
- rozwiązywanie zadań przez uczniów.

Potwierdziły to prowadzone w ramach badań obserwacje lekcji matematyki.

Z konstruktywistycznym podejściem do nauczania – uczenia się matematyki jest trochę jednak tak, jak ze świadomością, że mówimy prozą. Wielu nauczycieli zachęca uczniów, by aktywnie uczyli się i sami konstruowali swoją wiedzę matematyczną. Do upowszechnienia takiego stylu organizacji zajęć przyczyniła się wieloletnia działalność Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki. To właśnie na organizowanych przez SNM konferencjach i warsztatach nauczyciele wymieniali się doświadczeniami z innowacyjnych działań



i ich efektywności. Od lat taki styl organizacji zajęć propaguje także Centrum Edukacji Obywatelskiej. O konstruktywizmie w edukacji, w tym matematycznej, pisze wielu badaczy. Warto wspomnieć prof. Dorotę Klus-Stańską, prof. Stanisława Dylaka czy dra Mirosława Dąbrowskiego.

Poniżej podanych jest kilka przykładów sytuacji, w których uczniowie mogą samodzielnie i aktywnie uczyć się i być za ten proces odpowiedzialni.

Wskazówki metodyczne: motywowanie i angażowanie uczniów w uczenie się matematyki

Uczenie się wymaga świadomości („czego i po co się uczyć”), zaangażowania i odpowiedzialności za własną pracę.

Jednym ze sposobów angażowania uczniów w proces uczenia się jest stosowanie podczas lekcji metod aktywizujących.

Rodzaje metod nauczania

W literaturze pedagogicznej funkcjonuje wiele różnych klasyfikacji metod nauczania. Poniżej przedstawiona jest jedna z bardziej popularnych, wywodząca się z prac Franciszka Szloska (1999).

Podające:

- wykład informacyjny,
- pogadanka,
- opowiadanie,
- opis,
- prelekcja,
- anegdota,
- odczyt,
- objaśnienie lub wyjaśnienie.

Problemowe:

- wykład problemowy,
- wykład konwersatoryjny,
- klasyczna metoda problemowa,
- aktywizujące:
 - » metoda przypadków,
 - » metoda sytuacyjna,
 - » inscenizacja,



- » gry dydaktyczne: symulacyjne, decyzyjne, psychologiczne,
- » seminarium,
- » dyskusja dydaktyczna:
 - * związana z wykładem,
 - * okrągłego stołu,
 - * wielokrotna,
 - * burza mózgów,
 - * panelowa,
 - * metaplan.

Ekspozujące:

- film,
- sztuka teatralna,
- ekspozycja,
- pokaz połączony z przeżyciem.

Programowane:

- z użyciem komputera,
- z użyciem maszyny dydaktycznej,
- z użyciem podręcznika programowanego.

Praktyczne:

- pokaz,
- ćwiczenia przedmiotowe,
- ćwiczenia laboratoryjne,
- ćwiczenia produkcyjne,
- metoda projektów,
- metoda przewodniego tekstu.

Metody aktywizujące

Wbrew pozorom nie jest łatwo wybrać z powyższego katalogu odpowiednie do zajęć matematyki metody aktywizujące. Wiele bowiem zależy od kontekstu i sposobu ich definiowania. Na przykład wykład lub pogadanka zaliczone są do metod podających, takich, przy których uczniowie są biernymi odbiorcami. Ale jeśli wykład jest wstępem do formułowania pytań, dyskusji, rozwiązywania problemów? Czy uczniowie podczas takiego wykładu na pewno pozostają bierni?

A jeśli wykład jest przygotowany przez ucznia lub grupę uczniów? Czy dla nich to jest metoda podająca? Czy przygotowując i wygłaszając wykład dla koleżanek i kolegów są zaangażowani?



Wszelkie klasyfikacje metod nauczania – uczenia się tracą nieco na aktualności, gdy spojrzysz na nie przez pryzmat wykorzystania nowoczesnych technologii informacyjno-komunikacyjnych. Czy wykład umieszczony np. na YouTube, który uczeń sam znalazł i obejrzał kilkakrotnie by zrozumieć dane zagadnienie, był aktywnym uczeniem się?

Wskazanie metody pracy uczniów jest ważne, lecz ważniejszy jest cel zajęć, problemy, jakie będą stawiane uczącym się. Możemy wybrać dowolną technikę aktywizującą, lecz jeśli problem, nad którym pracują uczniowie, nie okaże się dla nich wyzwaniem i nie zainteresuje ich, to aktywność ta będzie pozorna i nie przyniesie aktywności intelektualnej. A przecież o taką właśnie chodzi w procesie uczenia się. I w koncepcji konstrukttywizmu.

Metody aktywizujące charakteryzują się:

- dużą siłą stymulowania aktywności uczniów i nauczycieli,
- wysoką skutecznością,
- dużą różnorodnością i atrakcyjnością działania.

Metody aktywizujące pozwalają nie tylko rozbudzić w uczniu zainteresowanie przedmiotem czy sprawdzić jego wiedzę. Główna zaleta tych metod polega na doskonaleniu umiejętności przydatnych nie tylko podczas lekcji, ale również w codziennym życiu, w tym w rozwijaniu kompetencji kluczowych, np. umiejętności wyciągania wniosków, myślenia analitycznego i krytycznego, łączenia zdarzeń i faktów w związku przyczynowo-skutkowe, umiejętności właściwego zachowania się w nowej sytuacji, komunikatywności, dyskusowania, kreatywności, pracy w grupie, czytania ze zrozumieniem.

Przed decyzją „Jaką metodę zastosuję?” nauczyciel powinien zadać sobie pytanie: Kiedy i w jakiej sytuacji uczeń będzie aktywny?

Uczeń będzie aktywny, gdy:

- cel zajęć jest dla niego bliski i zrozumiały („wiem czego i po co się uczyć”),
- uwzględnia się jego wcześniejsze osiągnięcia i doświadczenie, jego wiedzę osobistą, nieformalne uczenie się,
- uwzględnia się jego zainteresowania (zadania uznaje za własne, treści odwołują się do jego doświadczeń, w tym pozaszkolnych),
- bierze udział w planowaniu i podejmowaniu decyzji (coś od niego zależy, np. wybór metody pracy lub czas realizacji zadania),
- ma poczucie bezpieczeństwa (wie, że ma prawo do błędu, otrzyma od nauczyciela i/lub rówieśników konieczne wsparcie i informację zwrotną),
- działaniom towarzyszą pozytywne emocje,
- odczuwa satysfakcję (lubi to robić, ma poczucie sukcesu),
- ma poczucie własnej wartości („ja to potrafię”),
- dostrzega się jego wkład pracy, a nie tylko efekt (nauczyciel i grupa zauważają jego wysiłek i doceniają go).



Stosując metody aktywizujące nie prowadzimy ucznia „za rękę”, ale stwarzamy warunki, aby potrafił się uczyć myśleć, odkrywać, poszukiwać, doskonalić, komunikować się, działać i współpracować w grupie; aby brał odpowiedzialność za swoje efekty uczenia się.

Przykłady metod aktywizujących

Poniżej opisanych jest kilka metod aktywizujących, charakterystycznych dla edukacji matematycznej, wraz z przykładami.

Metoda projektów

Bazuje na praktycznym działaniu dotyczącym realizacji pewnego zdarzenia (projektu) zaproponowanego i zaprojektowanego przez uczniów.

Zazwyczaj przyjmuje się następujące etapy pracy nad projektem:

- określenie tematu i celów projektu,
- wskazanie zadań, które mają wykonać uczniowie, aby osiągnąć cele,
- wskazanie źródeł, do których należy sięgnąć przy zbieraniu informacji,
- ustalenie terminu prezentacji,
- omówienie kryteriów oceny,
- praca nad projektem,
- prezentacja projektu,
- ocena projektu.

Na zajęciach matematyki temat i główne cele projektu zazwyczaj wskazuje nauczyciel, pozostawiając uczniom swobodę w innych etapach prac. Ważną kwestią jest określenie sposobu monitorowania przez nauczyciela poszczególnych etapów działań – zapobieganie to nieporozumieniom i np. sytuacji, kiedy podczas prezentacji okazuje się, że uczniowie zrobili coś zupełnie innego, niż oczekiwał tego prowadzący zajęcia.

Dobrze jest, gdy proponowane tematy projektów związane są z pozaszkolnymi doświadczeniami uczniów i jednocześnie pokazują szerokie zastosowanie matematyki. Projekty realizowane są przez uczniów zazwyczaj w pracach grupowych, rzadziej indywidualnie.

Przykłady tematów projektów:

- Podatek VAT. Kto go płaci? Jakie są stawki? Jak się go wylicza?
- Jak liczyli Egipcjanie? Majowie? Rzymianie?
- Praktyczne zastosowania funkcji kwadratowej.
- Badania statystyczne dotyczące najchętniej oglądanych programów telewizyjnych.

Warto jednak pamiętać, że nauczyciele niezbyt często stosują metodę projektów w edukacji matematycznej. Prowadzone wśród nauczycieli liceów ogólnokształcących badania (Dylak,



2013) pokazały, że niespełna 15% z nich stosuje metodę projektów często, prawie co trzeci nauczyciel w ogóle nie proponuje uczniom tej metody pracy, co piąty robi to rzadko.

Wśród przyczyn niestosowania metody projektów ponad połowa nauczycieli wskazuje brak czasu i zbyt małą liczbę godzin przeznaczonych na realizację programu. Niecałe 7% badanych nauczycieli wskazało: brak zainteresowania uczniów lub nawet ich niechęć, nieumiejętność pracy w grupie, zbyt słaby poziom uczniów, nieznaną metodę, brak doświadczenia.

Rozwiązywanie problemów

To metoda wyjątkowo pożądana na lekcjach matematyki. I to począwszy od edukacji wczesnoszkolnej.

Propagowaniem tej metody uczenia się matematyki od początku zajmowało się Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki, wydając m.in. takie publikacje, jak Ziarenka czy Łamigłówki z Manchesteru.

Obecnie w większości podręczników można spotkać propozycję problemów do rozwiązania.

W ostatnich latach na rynku wydawniczym pojawiło się wiele publikacji zawierających edukacyjne propozycje różnych problemów do rozwiązania. Należą do nich na pewno książki Iana Stewarta, Raymonda Smullyana czy Kena Russella i Philipa Cartera. Niezwykle ważną pozycją jest „Myślenie matematyczne” Johna Masona.

Rozwiązywanie problemów kładzie nacisk:

- nie tylko na końcowy efekt, ale także na proces uczenia się,
- nie tylko na to, co uczeń umie, ale na proces rozumienia,
- nie tylko na stosowanie wiadomości w typowych zadaniach, ale na integrację zdobytej wiedzy i jej użycie w nowych, nietypowych sytuacjach.

W rozwiązywaniu problemów najważniejsze jest zatem:

- zrozumienie problemu,
- zaplanowanie rozwiązania,
- realizacja rozwiązania,
- prezentacja rozwiązania,
- zastosowanie posiadanej wiedzy przedmiotowej.

Każdy z tych etapów powinien być oceniony przez nauczyciela. Aby uczniowie doskonalili swoje kompetencje w zakresie rozwiązywania problemów, muszą otrzymywać szczegółową informację zwrotną.

Najczęściej pojawiają się problemy typu „Jaka to prawidłowość?” – związane są zarówno z liczbami, jak i figurami.



Przykłady:

1. Równości w kolejności

Przyjrzyj się zapisanym poniżej równościom i dopisz dwie kolejne równości, utworzone według tej samej reguły.

$$2^2 - 1^2 = 3$$

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$4^2 - 3^2 = 7$$

2. Po dwa, po trzy, po cztery...(Chodnicki, Dąbrowski, 2012)

Janek rozkładał klocki. Gdy układał je po dwa, to nie zostawał mu żaden klocek. Gdy układał je po trzy, również wszystkie klocki ładnie dawały się rozłożyć. Ile klocków mógł mieć Janek, jeśli wiadomo, że było ich mniej niż 50? Gdy Janek układał te same klocki co wcześniej, ale tym razem po cztery, to także dawały się wszystkie ładnie podzielić. Ile mógł mieć klocków?

Gdy Janek ułożył te same klocki po pięć, został mu jeden klocek. Czy teraz można już na pewno ustalić, ile miał klocków? Dlaczego?

Czy to możliwe, żeby:

- klocki dawały się rozłożyć po cztery, a nie dawały się rozłożyć po dwa?
 - klocki dawały się rozłożyć po trzy, a nie dawały się rozłożyć po sześć?
 - klocki dawały się rozłożyć po sześć, a nie dawały się rozłożyć po cztery?
- Dlaczego?

3. Jak złożyć kartkę?

Złóż prostokątną kartkę na pół i jeszcze raz na pół. Jak z tak złożonej kartki najprościej można wyciąć:

- cztery identyczne trójkąty?
- cztery identyczne czworokąty?
- dwie identyczne figury mające po jednej osi symetrii?
- figurę, która ma dwie osie symetrii?

Jakie jeszcze inne figury można łatwo wyciąć z tak złożonej kartki?

Jak należy złożyć kartkę, aby dało się z niej łatwo wyciąć osiem „kopii” tej samej figury? A figurę o czterech osiach symetrii?

Zbadaj, jak jeszcze można złożyć prostokątną kartkę i co z niej można wyciąć.



4. Trójkątne ściany (Ziarenka matematyczne, 1992)
Czworościan ma cztery trójkątne ściany. Jakie bryły (jeśli w ogóle jest to możliwe) można zbudować z pięciu trójkątnych ścian? A z sześciu?
5. Wielbłąd na pustyni (Łamigłówek, 1993)
Przejdzie przez Pustynię Żółtą zajmuje wielbłądowi osiem dni. Każdego dnia zwierzę musi wypić jeden bukłak wody. Niestety, na wielbłąda można załadować jedynie pięć pełnych bukłaków. Możesz jednak ustawić na pustyni magazyny z wodą.
Czy potrafisz określić najmniejszą liczbę wypraw, które trzeba odbyć, aby przebyć Pustynię Żółtą?
Ile wypraw potrzeba do przebycia Pustyni Czerwonej, którą wielbłąd pokonuje w dziesięć dni? Ile dni trwa najdłuższa podróż, jaką można odbyć na tym wielbłądzie?
Nowa rasa wielbłądów może nosić sześć bukłaków z wodą. Jakie będą tym razem odpowiedzi na postawione wcześniej pytania?

Dużą zaletą problemów jest to, że mogą je rozwikływać uczniowie w różnym wieku. Analizując sposób rozwiązania, język opisu, formułowane wnioski i uogólnienia, możemy wnioskować o dojrzałości matematycznej uczniów.

Kluczowe jest to, by od czasu do czasu uczniowie rozwiązywali problemy w klasie i rozwijali swoje kompetencje w tym zakresie we współpracy z rówieśnikami, na bieżąco weryfikowali swoje pomysły, pytając nauczyciela o zdanie.

Problemy można także wykorzystywać jako pracę długoterminową, wykonywaną w domu (samodzielnie lub w grupie). Pamiętać jednak należy o starannej ocenie każdego elementu rozwiązywania problemu, od zrozumienia, po prezentację rozwiązania.

Gry dydaktyczne

Metodą, która na pewno aktywizuje uczniów, są gry dydaktyczne, szczególnie te dostępne w wersji elektronicznej. Choć niezbyt nadają się do wykorzystania na zajęciach, np. z powodu konieczności zaplanowania ich w pracowni komputerowej, to doskonale służą pracy w domu.

W niektórych podręcznikach umieszczone są płyty CD z grami dydaktycznymi. Czasami wydawnictwa udostępniają takie gry także przez internet.

„Wplatając w edukację szkolną elementy gier i zabaw, stwarzamy sytuacje, w których uczniowie angażują się w to, co robią, chętnie pracują i dążą do osiągnięcia jak najlepszych wyników. Aktywizacja ucznia, która pobudza go do samodzielnego myślenia, to przewidywanie, poszukiwanie, eliminowanie niepotrzebnych kroków, tworzenie pomysłów i orientacji” (Por. Jagodzińska, b.r.).

Gry dydaktyczne pomagają także w rozwijaniu sprawności matematycznych, np. pamięciowego liczenia czy obliczania pól powierzchni figur płaskich. W trakcie gry uczeń



może ćwiczyć sprawności rachunkowe w atrakcyjny dla siebie sposób – wykonanie tej samej liczby przykładów ćwiczeń w zeszyte szybko by go znudziło.

Pojawiający się w kontekście gier element rywalizacji także może pozytywnie wpłynąć na motywację uczniów, i to nawet jeśli przeciwnikiem jest komputer.

Sporo o dostępnych zasobach internetowych związanych z edukacją matematyczną, w tym z grami dydaktycznymi, można znaleźć w publikacji wydanej przez ORE „Efektywne metody nauczania matematyki dla uczniów gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych z wykorzystaniem TIK” (Kwiecień, 2016). Warto także skorzystać z zasobów portalu [EDUnews](https://edu.ore.edu.pl/).

Burza mózgów

Jest to przykład dyskusji polegającej na umożliwieniu uczniom szybkiego zgromadzenia wielu konkurencyjnych lub uzupełniających się hipotez rozwiązania problemu. Można zgłaszać wszystkie pomysły, w obojętnej formie, tak żeby nawet chwila namysłu nad poprawnością językową nie zmniejszyła ich ilości. Pomysły te nie są oceniane ani komentowane, a na ich autorów nie spada żadna odpowiedzialność czy konsekwencja za ich podanie. Cała konstrukcja burzy mózgów jest tak pomyślana, aby przerwać komunikację między fazą pomysłów i fazą oceniania pomysłów.

Burzę mózgów można stosować na różnych etapach zajęć, np. jako rozgrzewkę na ich początku, by zachęcić uczniów do aktywności umysłowej, wykorzystać ich wiedzę pozaszkolną. Jest to także dobra metoda do rozpoczęcia prac nad rozwiązywaniem problemu otwartego.

Warto jednak pamiętać o specyfice edukacji matematycznej. Rzadko kiedy pojawiają się sytuacje, gdy uczniowie mogą bez zastanowienia generować pomysły. Zazwyczaj potrzebna tu jest faza namysłu, prowadząca do zrozumienia problemu, a dopiero po chwili powinna nastąpić faza dzielenia się pomysłami.

Lekcja odwrócona

Wiele się ostatnio mówi i pisze o lekcjach odwróconych, stanowiących metodę tzw. nauczania wyprzedzającego. To jedna z ważnych i efektywnych metod nauczania i uczenia się. Wiele na ten temat pisał prof. Dylak (Dylak, 2013):

„Podstawowym założeniem kształcenia wyprzedzającego jest wprowadzenie uczniów w cykl uczenia się konstruktywistycznego: od poszukiwania odniesień we własnej wiedzy dotychczasowej (najczęściej potocznej, ale też semantycznej) oraz w źródłach zewnętrznych, poprzez przetwarzanie, do systematyzacji, by w końcu, przy pomocy nauczyciela, zbudować uczniowski system kategorialny.

Istotą kształcenia wyprzedzającego jest aktywne organizowanie i przyswajanie wiadomości przez uczniów przed lekcją, w procesie samodzielnego zbierania



informacji, a także przez poszukiwanie odniesień we własnej dotychczasowej wiedzy w związku z tematem, który ma być ostatecznie omawiany na lekcji. Uczniowie, aby zdobyć wstępne, ogólne czy psychologiczne rozumienie nowego materiału, używają wcześniejszych wiadomości, doświadczeń, przypuszczeń, związków emocjonalno-poznawczych, wiedzy potocznej, czy nawet posiadanej wiedzy systematycznej. Poszukują w pamięci także informacji i doświadczeń, które pozwolą im na zrozumienie nowego materiału i nadanie tym treściom osobistego znaczenia. Dopiero po opracowaniu ogólnego obrazu planowanego tematu następuje działanie kierowane precyzyjnie określonymi zadaniami ze strony nauczyciela. Tak przygotowany uczeń przychodzi na lekcję zasadniczą, aby przedstawić swoją wiedzę nauczycielowi, którego rolą jest inspirowanie go zadaniami systematyzacji opanowanych wiadomości. Cały proces zwieńczony jest ewaluacją – głównie uczniowską. Zadania stawiane uczniom do wykonania tuż przed lekcją ukierunkowują ich myślenie, nie nad przedstawianym przez nadawcę – nauczyciela materiałem, ale podczas samodzielnego zbierania i porządkowania informacji, czyli myślowej obróbki opanowywanych wiadomości. W ten sposób nowe wiadomości są/mogą być czynnie wiązane z tymi już zakorzenionymi w pamięci” (Por. Kawalek, Młynarska, Napiórkowska, Podolak, Śniezek, b.r.).

W metodzie zajęć odwróconych doskonale sprawdzają się materiały dostępne w internecie – mogą one stanowić zasób informacji przygotowujący do tematu omawianego w klasie. Nauczyciel może wskazać (może także przygotować je samodzielnie) w sieci zbiór wiadomości, z którymi uczniowie zapoznają się jeszcze przed lekcją, lub może skorzystać z ciągle powiększającej się bazy wiedzy dostępnej w sieci.

Źródeł materiałów dla lekcji odwróconej jest wiele i powstaje ich coraz więcej (Kwiecień, 2016). Flagowym, ciągle się rozwijającym portalem, jest [Akademia Khana](#). W jego wizytówce czytamy: „Nasza matematyczna misja to przeprowadzenie uczniów od przedszkola do rachunku różniczkowego za pomocą nowoczesnych technologii adaptacyjnych, które identyfikują mocne i słabe strony ucznia”.

Polska strona Akademii Khana jest wzorowana na anglojęzycznym [portalu](#) prowadzonym od roku 2006 przez Salmana Khana, absolwenta Massachusetts Institute of Technology.

W polskiej edukacji mieliśmy już wiele prób tworzenia portali edukacyjnych z materiałami dla uczniów i nauczycieli – jednym z nich jest [Scholaris](#). Inne godne polecenia miejsca w sieci z materiałami do nauczania matematyki, to:

- [E-podręczniki](#), przygotowane w ramach projektu realizowanego przez Ośrodek Rozwoju Edukacji,
- [ZOO matematyczne](#), skierowane do uczniów szkół podstawowych,
- [Matemaks](#), serwis autorstwa Michała Budzyńskiego, podzielony na działy tematyczne, bogaty w materiał wprowadzający w wybrane zagadnienia oraz przykłady rozwiązywania zadań, również w formie filmowej,
- [Batmat](#), interaktywne ćwiczenia dla gimnazjum i liceum,



- interaktywne ćwiczenia dla dzieci [Superkid](#),
- [matematyka reaktywacja](#),
- [math.edu.pl](#) – proste ćwiczenia online przede wszystkim dla uczniów szkół podstawowych,
- [matematykatv.pl](#) – portal prezentujący rozwiązania zadań w formie krótkich filmów,
- [matematyczny-swiat](#) – blog matematyczny, a w nim ciekawostki matematyczne,
- [matematyka.pisz.pl](#) – matematyka w gimnazjum i liceum.

Przykładem zajęć z wykorzystaniem metody odwróconej lekcji może być analiza dowodów twierdzeń. Nauczyciel wskazuje uczniom źródło, np. e-podręczniki, i prosi ich, by przeanalizowali dowód konkretnego twierdzenia. Jest to szczególnie atrakcyjne, gdy dowód jest przedstawiony dynamicznie, w postaci animacji czy z wykorzystaniem np. Geogebry. Możliwość wielokrotnego – w razie potrzeby – obejrzenia dowodu, przeanalizowania kolejnych kroków bez presji czasu oraz oceniania przez nauczyciela i rówieśników daje uczniowi poczucie bezpieczeństwa, pozwala na uczenie się we własnym tempie.

Wiele metod aktywizujących związanych jest z pracą w grupach. Na ten temat napisano już wiele publikacji. Przypomnijmy tu podstawowe fakty.



Nauczyciel może podjąć odpowiednią decyzję dotyczącą organizacji pracy w grupie – zarówno pracy w klasie, jak i np. realizacji projektu poza szkołą – tylko wtedy, gdy dobrze zna uczniów danej klasy. Przy podejmowaniu takiej decyzji warto pomyśleć o:



- kryteriach podziału uczniów na grupy,
- określeniu ról poszczególnych członków grupy,
- komunikacji w grupie i między grupami,
- roli nauczyciela.

Ważną kwestią są kryteria wyboru uczniów do poszczególnych grup. Czasami można usłyszeć wypowiedzi rodziców, że uczniowie uzdolnieni tracą czas, pracując z uczniami, którzy gorzej radzą sobie z matematyką.

W zależności od celu, dla realizacji którego organizujemy pracę z podziałem na grupy, w różny sposób możemy do nich dobierać uczniów.

- A. Grupy jednorodne pod względem osiągnięć szkolnych.
- B. Grupy o zróżnicowanym poziomie.
- C. Grupy koleżeńskie. Pożądane jest, aby uczniowie łączyli się w grupy koleżeńskie, ponieważ taki układ daje uczniom poczucie bezpieczeństwa. Dzieci w grupach przyjaznych pracują lepiej mimo różnic zdolności.
- D. Grupy doboru celowego, np. stosujemy dobieranie się w grupę z dziećmi, które siedzą najdalej od danego ucznia; utworzenie grupy osób, które do tej pory z sobą nie pracowały.
- E. Grupy wybierane losowo.

Każdy z tych sposobów podziału ma swoje zalety i wady z punktu widzenia celów zajęć, nauczyciela, poszczególnych uczniów oraz klasy jako całości. Doświadczenie pokazuje, że warto stosować różne podziały. Pozwala to nauczycielowi obserwować uczniów w różnych sytuacjach i lepiej – w przyszłości – dobierać składy poszczególnych grup.

Często słyszy się, że praca w grupach jest czasochłonna oraz wymaga przeorganizowania przestrzeni sali lekcyjnej. Jednak warto pamiętać, że już dwoje uczniów w klasie to grupa – uczniowie mogą utworzyć np. grupę czteroosobową na kilka minut, przedyskutować jakieś zagadnienie, i wrócić szybko do pracy indywidualnej.

Praca w grupie ma wiele zalet, zarówno dla uczniów, jak i nauczyciela:

- rozwija umiejętność komunikowania się i współpracy,
- uczy przestrzegania przyjętych zasad,
- pomaga stać się odpowiedzialnym za swoje własne uczenie się,
- umożliwia wzajemne uczenie się od siebie,
- zwiększa zaangażowanie i motywację do pracy,
- zapewnia większe poczucie bezpieczeństwa,



- wzmacnia wiarę we własne możliwości, daje szansę na pokonywanie własnej nieśmiałości,
- uczy tolerancji i życzliwości,
- przygotowuje do publicznych wystąpień.

Jednak by praca w grupach na lekcjach matematyki przyniosła pożądane efekty, trzeba dowiedzieć się, jak ta forma pracy przebiega na innych przedmiotach, na poziomie szkoły. Dlatego warto znaleźć odpowiedzi na podobne pytania:

- Jakie są szkolne priorytety dotyczące pracy w grupie?
- Jak moi uczniowie pracują w grupach na innych lekcjach?
- Jakie mogą dostać wsparcie od moich koleżanek i kolegów w pokonywaniu trudności w pracy zespołowej? Co ja mogę im dać?
- Jak możemy pomagać uczniom w rozwijaniu kompetencji pracy w grupie poprzez planową i systematyczną ocenę oraz informację zwrotną o poziomie nabycia przez nich tej kompetencji, o ich mocnych i słabych stronach?

Ważnym elementem wspierającym rozwój kompetencji współpracy powinna się stać samoocena. Warto zachęcać uczniów do rozmów o tym, jakie są ich mocne strony „bycia w grupie”, a jakie słabsze, i co warto w związku z tym zrobić; do refleksji nad tym, w czym są dobrzy, a czego jeszcze muszą się nauczyć.

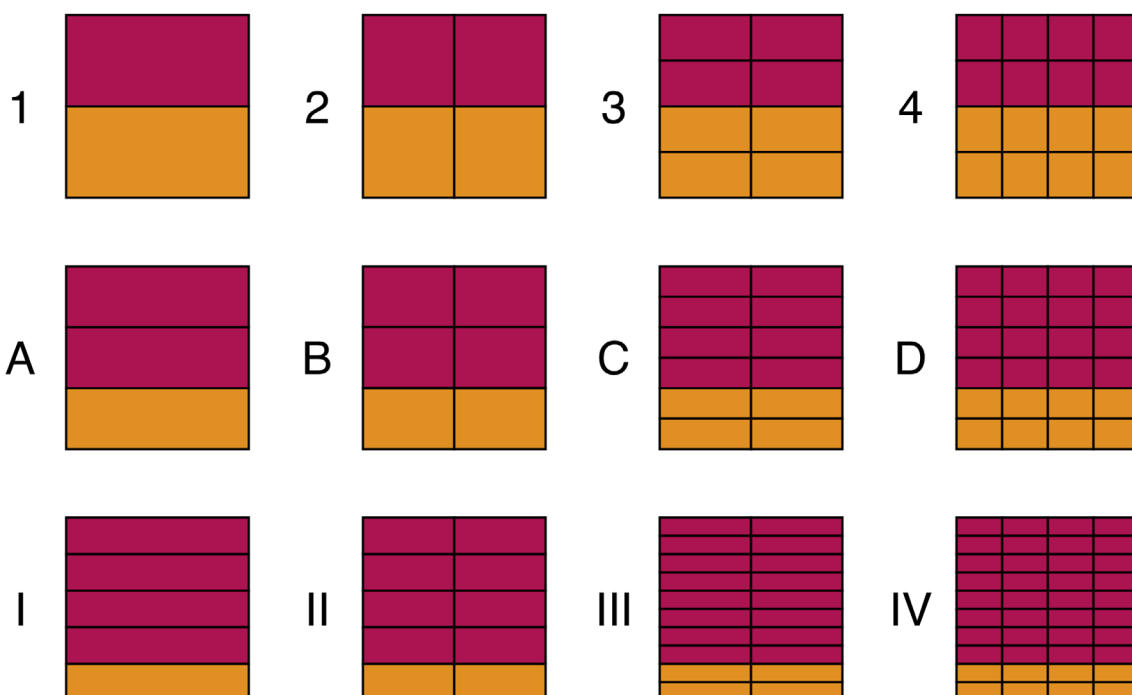
Przykłady zadań i sytuacji ilustrujące konstruktywistyczne podejście do nauczania – uczenia się matematyki

W matematyce pojawia się wiele sytuacji pozwalających na to, by uczniowie dokonywali odkryć, konstruowali swoją wiedzę matematyczną, poznawali jej strukturę. Poniżej przedstawione są przykłady takich sytuacji w zakresie odkrywania oraz rozumienia różnych strategii w rozwiązywaniu zadań.

Przykład 1. Porównywanie ułamków zwykłych

Uczniowie mogą odkryć ułamki równe oraz sprawnie porównywać ułamki zwykłe, zaczynając od posługiwania się odpowiednio podzielonymi kwadratami (jak na rysunku poniżej), prostokątami lub kołami.

Początkowo najlepiej byłoby, gdyby uczniowie mieli wycięte figury i mogli je na siebie nakładać, następnie można przejść do rysunków, a na końcu do zapisu symbolicznego.

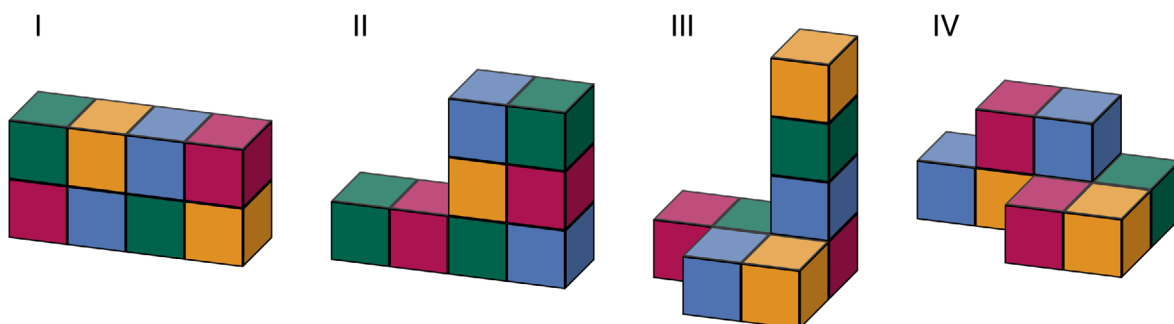


Doświadczenie pokazuje, że uczniowie dokonują największej liczby odkryć, gdy zaczynają od nakładania na siebie części figur i ich porównywania. Mogą w ten sposób stosunkowo szybko porównywać, dodawać i odejmować ułamki.

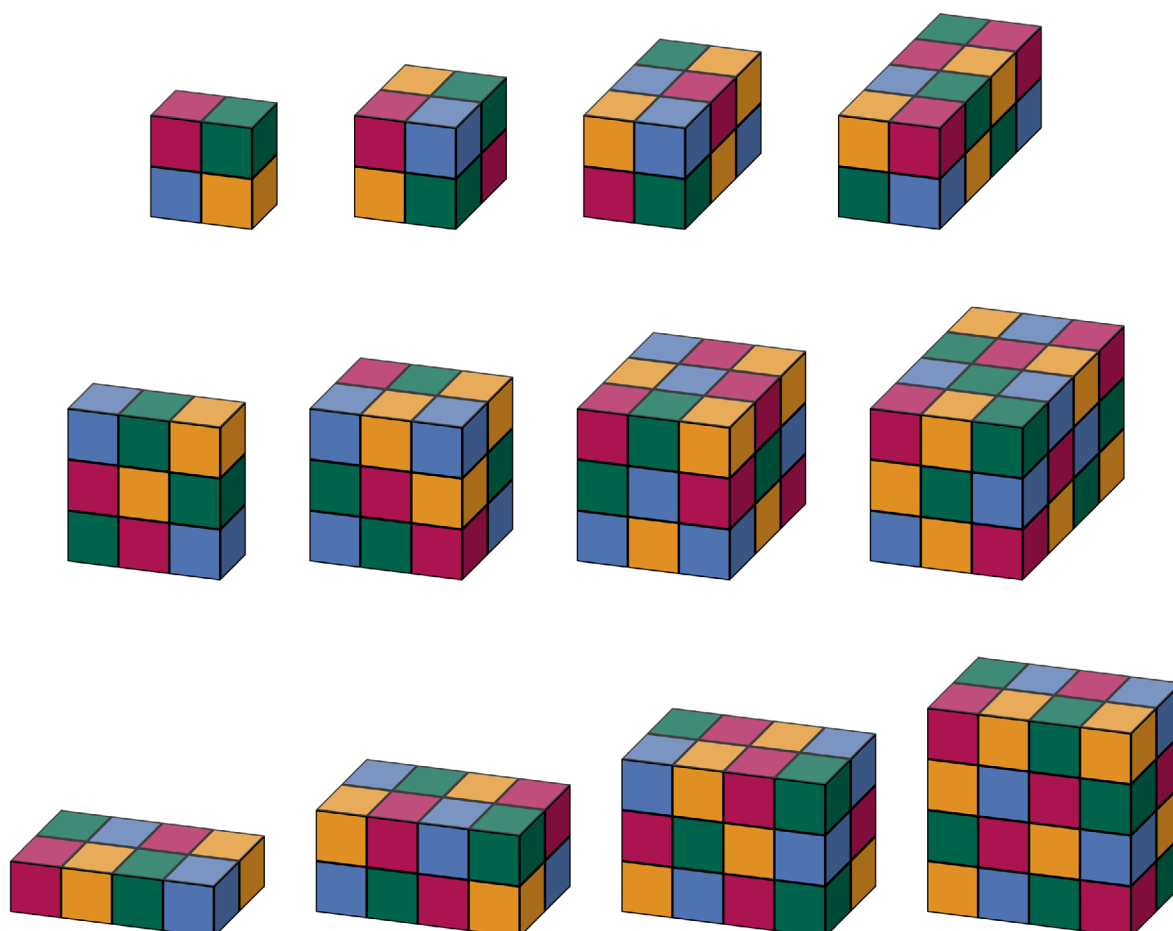
Przykład 2. Objętość prostopadłościanu

Podobną drogę – od konkretnego przez rysunek do symbolu (wzoru) – uczniowie mogą przejść w przypadku poszukiwania sposobu obliczania objętości prostopadłościanu.

Warto zacząć od zabawy klockami, zachęcać uczniów do budowania różnych brył z podanej liczby klocków



Następnie należy przejść do rysunków, pytając uczniów, z ilu klocków zbudowane są narysowane bryły.



Na koniec warto poprosić uczniów o podanie sposobu szybkiego liczenia objętości, i wspólnie podsumować działanie, formułując wzór na obliczanie objętości prostopadłościanu.

Ważnym elementem konstruowania własnej wiedzy matematycznej jest znajomość różnych strategii postępowania, np. rachowania w pamięci czy rozwiązywania zadań tekstowych. Poznawanie i analiza różnych strategii pozwala na bardziej elastyczne, otwarte podejście ucznia do zadań nietypowych, rozwija jego język matematyczny oraz pomaga budować struktury wiedzy matematycznej.

Przykład 3. Strategie odejmowania pamięciowego

Poniżej przedstawione są różne sposoby odejmowania. Na czym polega każdy z nich?



84 - 57				
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$57 + 3 = 60$	$14 - 7 = 7$	$84 - 50 = 34$	$84 - 54 = 30$	$80 - 53 = 27$
$60 + 20 = 80$	$70 - 50 = 20$	$34 - 7 = 27$	$30 - 3 = 27$	
$80 + 4 = 84$	$7 + 20 = 27$			
$3 + 20 + 4 = 27$				

Powyższe zadanie może być adresowane do uczniów w różnym wieku, począwszy od tych z klasy III. Analizując strategie i rozmawiając o nich z rówieśnikami, uczeń lepiej zrozumie działanie odejmowania oraz to, że do rozwiązania można dojść różnymi drogami. Warto podkreślić, że ważna jest nie sama znajomość strategii rachowania w pamięci, ale przede wszystkim umiejętność podejmowania decyzji o wyborze strategii w konkretnej sytuacji (Por. Chodnicki, Dąbrowski, 2012 i Dąbrowski, 2008).

Nauczyciele często mówią, że uczniowie nie potrafią rozwiązywać zadań tekstowych, co jest przecież bardzo ważną umiejętnością. Im wcześniej dziecko nauczy się ich czytania, rozumienia i rozwiązywania, tym więcej strategii działania z nimi pozna i tym chętniej będzie je rozwiązywać. Warto przekonać rodziców, by „pomagając” rozwiązywać w domu zadania tekstowe, nie stosowali zbytnich formalizmów, by pozwalali dzieciom na stosowanie różnych sposobów rozwiązywania, np. metodą prób i poprawek, rysunkiem, tabelką.

Przykład 4. Strategie rozwiązywania zadań tekstowych

Zadanie 1.

W zagrodzie były kury i króliki. Razem było 20 głów i 68 nóg. Ile było kur, a ile królików? To zadanie większość dorosłych rozwiązałaby przy pomocy układu równań. Jednak można zrobić to inaczej. Poniżej przedstawione są trzy sposoby: prób i poprawek, rysunek i tabelka.

- **Strategia prób i poprawek**

Wszystkich zwierząt jest 20.		
To może królików jest 10?	10 królików to:	$10 \times 4 = 40$ nóg
	Kur też byłoby 10:	$10 \times 2 = 20$ nóg
	Razem byłoby	$40 + 20 = 60$ nóg



Nóg miało być 68, czyli jest za mało. Pierwszy strzał i pudło. Ale co to oznacza? Co wynika z tego, że gdy królików jest 10, to nóg łącznie jest za mało? Czy królików powinno być mniej czy więcej niż 10?

Więcej, bo to one „dodają” nóg		
Pora na poprawkę! To może 12?	12 królików to:	$12 \times 4 = 48$ nóg
	8 kur to:	$8 \times 2 = 16$ nóg
	Razem byłoby	$48 + 16 = 64$ nogi

Znacznie lepiej!

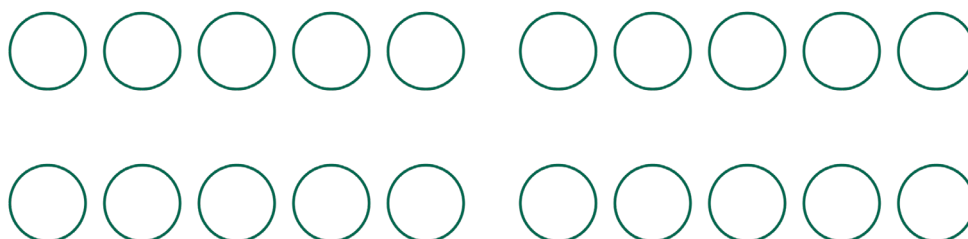
Widać już, że królików było 14.	14 królików to:	$14 \times 4 = 56$ nóg
Ale sprawdźmy na wszelki wypadek:	6 kur to:	$6 \times 2 = 12$ nóg
	Razem byłoby	$56 + 12 = 68$ nóg!

Zrobione!

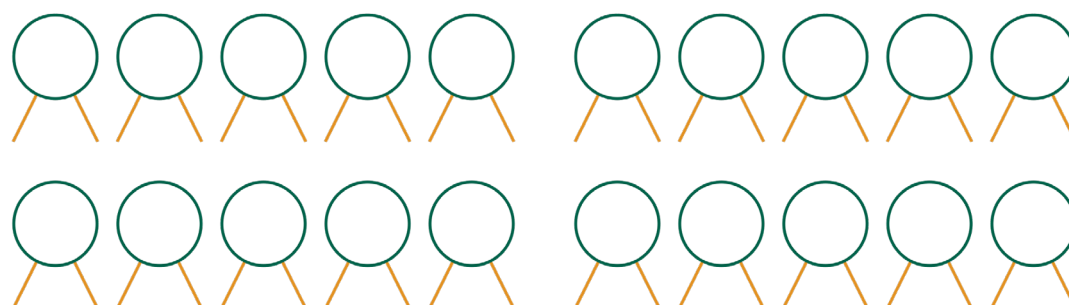
(Por. Dąbrowski, 2008).

- Dobry rysunek**

Było 20 głów, narysujmy je:

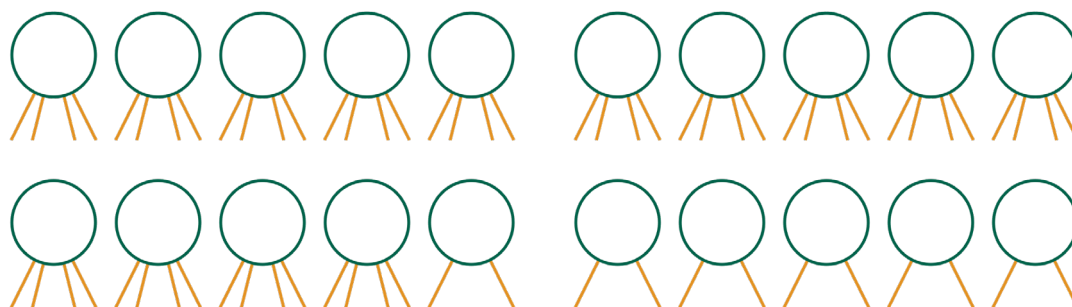


Do każdej głowy „doczepiamy” dwie nogi:





Tak wyglądałaby sytuacja, gdyby były to same kury. „Użyliśmy” już 40 nóg. Zostało nam jeszcze 28 nóg „bez przydziału”, więc dorysujmy je parami, zmieniając w ten sposób kury na króliki.



Zadanie narysowane. Teraz wystarczy policzyć: 14 królików i 6 kur.

Warto sprawdzić, czy czego nie pominęliśmy: $14 \times 4 + 6 \times 2 = 56 + 12 = 68$.

- Zrób tabelkę**

Użycie tabeli jako sposobu rozwiązywania zadań pozwala na szukanie związku między danymi i niewiadomymi.

Warto zacząć od metody prób i poprawek. Załóżmy, że było tyle samo królików i kur.

Liczba królików	Liczba nóg królików	Liczba kur	Liczba nóg kur	Łączna liczba głów królików i kur	Łączna liczba nóg królików i kur
10	40	10	20	20	60

60 nóg to za mało. Zwiększajmy zatem stopniowo liczbę królików.

Liczba królików	Liczba nóg królików	Liczba kur	Liczba nóg kur	Łączna liczba głów królików i kur	Łączna liczba nóg królików i kur
10	40	10	20	20	60
11	44	9	18	20	52
12	48	8	16	20	54
13	52	7	14	20	56
14	56	6	12	20	58

Najtrudniejszą czynnością tej metody było zbudowanie tabelki. Rozwiązanie przyniosło wykorzystanie prostych zależności.



Opisane powyżej strategie rozwiązywania zadań tekstowych pozwalają na ich solucje bez znajomości równań czy układów równań. Powodują, że stosunkowo złożone zagadnienia stają zrozumiałe i dość łatwe dla uczniów w różnym wieku – oczywiście pod warunkiem, że nie narzucamy im jedynej słusznej metody rozwiązania.

Uczniowie muszą najpierw poznać strategie rozwiązywania zadań tekstowych. Dlatego organizując np. pracę w grupach, warto każdej zlecić opracowanie zadania konkretną podaną metodą. W podsumowaniu należy porównać wyniki i efektywność sposobów, którymi posługiwały się grupy. Trzeba jednak pamiętać, że nie należy prosić uczniów, by rozwiązyali to samo zadanie kilkoma metodami – taka prośba z punktu widzenia ucznia jest po prostu niezrozumiała.

Jeśli chcemy, by nasi uczniowie rozwiązywali zadania tekstowe różnymi metodami, musimy dopuścić taką możliwość także podczas sprawdzianów. Wymaga to odpowiedniego przygotowania sposobu oceniania prac klasowych.

Zadanie 2. (zadanie egzaminacyjne)

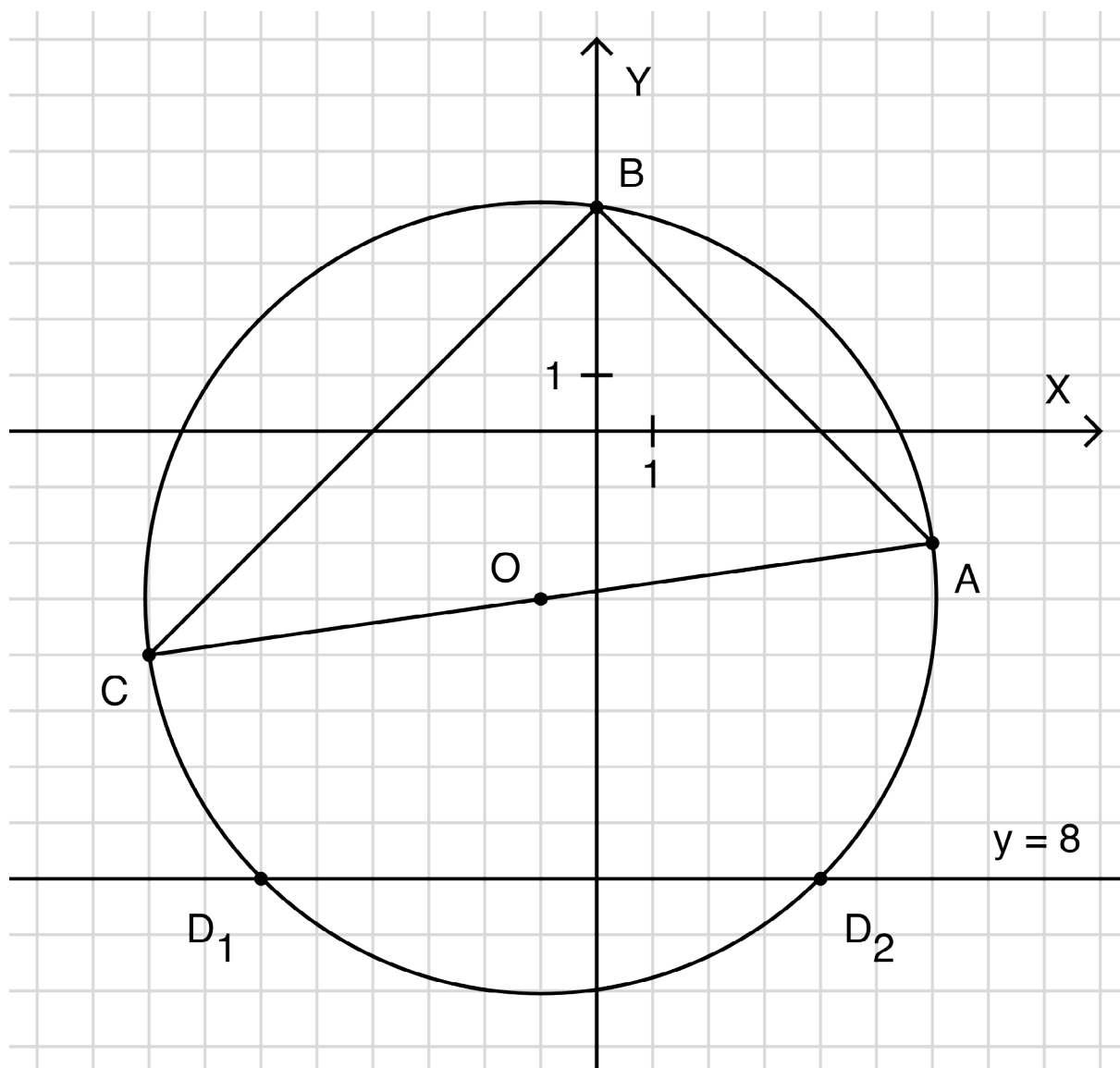
Dane są trzy punkty: $A = (6, -2)$, $B = (0, 4)$, $C = (-8, -4)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu D należącego do prostej o równaniu $y = -8$, aby na czworokącie $ABCD$ można było opisać okrąg.

Zadanie otwiera przed uczniami możliwość zastosowania różnych metod rozwiązania. Analiza prac pokazała, że zastosowali oni następujące sposoby:

- twierdzenie Pitagorasa,
- twierdzenie kosinusów,
- równania okręgu opisanego na czworokącie,
- dwa sposoby graficzne,
- twierdzenie Ptolemeusza,
- własności symetralnych boków.

Zaskakujące jest zastosowanie twierdzenia Ptolemeusza, które nigdy nie występowało w szkolnej matematyce. Ponieważ postąpili tak uczniowie z różnych szkół, można wykluczyć niesamodzielność prac. Sytuacja stała się jasna po zbadaniu kontekstu egzaminu. Podczas jego trwania uczniowie mieli możliwość korzystania z dowolnych tablic matematycznych. Część z nich przyniosła na egzamin duże, ponadstustronicowe tablice, w których twierdzenie to było zamieszczone. Ponieważ dotyczy ono wprost sytuacji z zadania, część uczniów postanowiła z niego skorzystać.

Najbardziej niekonwencjonalne, niesłychanie lakoniczne i w pełni poprawne było następujące rozwiązanie.



Środkiem okręgu jest punkt $O = (-1, -3)$ bo

$$|OC| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

$$|OA| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

$$|OB| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$



Okrąg może z prostą mieć 2 punkty wspólne, 1, albo 0.

Ten ma dwa $D_1 = (-6, -8)$ i $D_2 = (4, -8)$ leżą one na prostej i

$$|OD_1| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$|OD_2| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

Czyli D_1 i D_2 to szukane punkty.

Świadczy ono o dużej inteligencji matematycznej ucznia. Do maksimum wykorzystał on możliwości stworzone przez autorów zadania:

- trójkąt ABC jest prostokątny,
- punkty A, B, C leżą blisko początku układu współrzędnych i mają całkowite współrzędne,
- rozwiązanie można odczytać z rysunku.

Trzeba przy tym zauważyć, iż nie poprzestał wyłącznie na odczytaniu rozwiązania, ale bardzo dobrze je uzasadnił.

Rozwiązanie zadania stawalo się znacząco łatwiejsze, gdy uczeń zauważył, że trójkąt ABC jest prostokątny – upraszczało to także pozostałe sposoby rozwiązania.

Jak widać z powyższych dwóch przykładów, uczniowie na różnych etapach kształcenia rozwiązują zadania różnymi metodami. Oczywiście akceptacja przez nauczyciela tej wielości sposobów i strategii ma zasadniczy wpływ na jego warsztat pracy, przede wszystkim na sposób oceniania osiągnięć uczniów.

Jeśli chcemy, by nasi uczniowie rozwiązywali zadania tekstowe różnymi metodami, musimy dopuścić taką możliwość także podczas sprawdzianów. Wymaga to odpowiedniego przygotowania sposobu oceniania prac klasowych.

Przykład 5. Strategie rozwiązywania zadań zamkniętych

Egzaminy zewnętrzne wprowadziły do praktyki szkolnej zadania zamknięte. Czy wiemy, jak uczniowie je rozwiązują? Warto – podobnie jak w przypadku zadań tekstowych – pokazać im różne strategie rozwiązywania tego typu zagadnień (Por. Dąbrowski, Dubiecka, Fryska, 2003):

- otwieranie – uczeń postępuje tak, jak przy rozwiązywaniu zadania otwartego, a następnie porównuje otrzymany wynik z kolejnymi możliwymi odpowiedziami; metoda ta może być użyta do rozwiązywania każdego zadania zamkniętego, jakkolwiek jest ona czasochłonna,



- rozpoznawanie – uczeń bada kolejno, która z podanych odpowiedzi spełnia wszystkie warunki zadania; jest to strategia wymagająca szczególnie starannego przeczytania i zrozumienia zadania; zazwyczaj jest mniej czasochłonna od metody otwierania,
- eliminacje i preferencje – uczeń rozpoznaje odpowiedzi nieprawdziwe i kolejno je odrzuca; eliminowanie może być całkowite, wtedy pozostaje jedna poprawna odpowiedź, lub częściowe – uczeń odrzuca niektóre z odpowiedzi, a z pozostałych próbuje wybierać tę, która wydaje mu się najbardziej prawdopodobna.

Popatrzmy na kilka przykładów.

Zadanie 1.

Liczba o 19 mniejsza od -16 to:

- A. 35
- B. 3
- C. -3
- D. -35

Otwierając to zadanie, uczeń musi po prostu wykonać odejmowanie:

$$-16 - 19 = -35.$$

Oczywiście jeśli zamiast odejmowania doda liczby, to otrzyma w wyniku liczbę 3 i wówczas wskaże złą odpowiedź. Stosując metodę rozpoznawania, uczeń po kolei sprawdza każdą liczbę, wnioskując, czy spełnia ona warunki zadania. W tym ćwiczeniu uczeń może od razu wyeliminować liczby dodatnie. Z dwóch ujemnych może odrzucić -3, bo jest większa od -16.

Podobnie można szybko rozwiązać zadania:

Zadanie 2.

Aby iloczyn $1\frac{7}{11} \cdot \square$ był równy 1, w miejsce kwadratu należy wstawić:

- A. $\frac{11}{7}$
- B. $-1\frac{11}{7}$
- C. $\frac{11}{18}$
- D. $-\frac{11}{18}$

**Zadanie 3.**

Jaką liczbę należy wstawić w miejsce kwadratu, aby nierówność $\square < 6,108$ była prawdziwa?

- A. 6,1075
- B. 6,11
- C. 6,20
- D. 6,109

Zadanie 4. (matura PP 2015)

Równanie $\frac{x-1}{x+1} = x-1$

- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 1$.
- B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 0$.
- C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = -1$.
- D. ma dokładnie dwa rozwiązania: $x = 0$, $x = 1$.

Rozwiązanie przez otwarcie:

$$\begin{aligned}x-1 &= (x+1)(x-1), x-1 \\x-1-(x+1)(x-1) &= 0 \\(x-1)(1-(x+1)) &= 0 \\-x(x-1) &= 0\end{aligned}$$

Skąd $x = 0$ lub $x = 1$, równanie ma dokładnie dwa rozwiązania.

Rozwiązanie przez sprawdzenie dystryktorów:

A. $x = 1$ spełnia równanie, B. $x = 0$ spełnia równanie, skąd wnioskujemy, że istnieją co najmniej dwa rozwiązania, C. $x = -1$ nie należy do dziedziny, a zatem prawdziwe jest D.

Innym sposobem radzenia sobie z zadaniami zamkniętymi jest **metoda eliminacji i preferencji**.

**Zadanie 5.**

Liczba dwadzieścia jeden całych i siedemdziesiąt dwie setne zapisana cyframi to:

A. 21,072

B. 12,72

C. 2,172

D. 21,72

Odpowiedzi B. i C. uczeń może wyeliminować od razu, bo liczba całości jest inna niż 21. Pozostają do rozważenia odpowiedzi A. i D. W odpowiedzi A. występują części tysięczne, więc też można ją odrzucić. Pozostaje odpowiedź D. jako prawidłowa.

Zadanie 6.

Suma ułamków $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{7}$ jest równa:

A. $\frac{8}{11}$

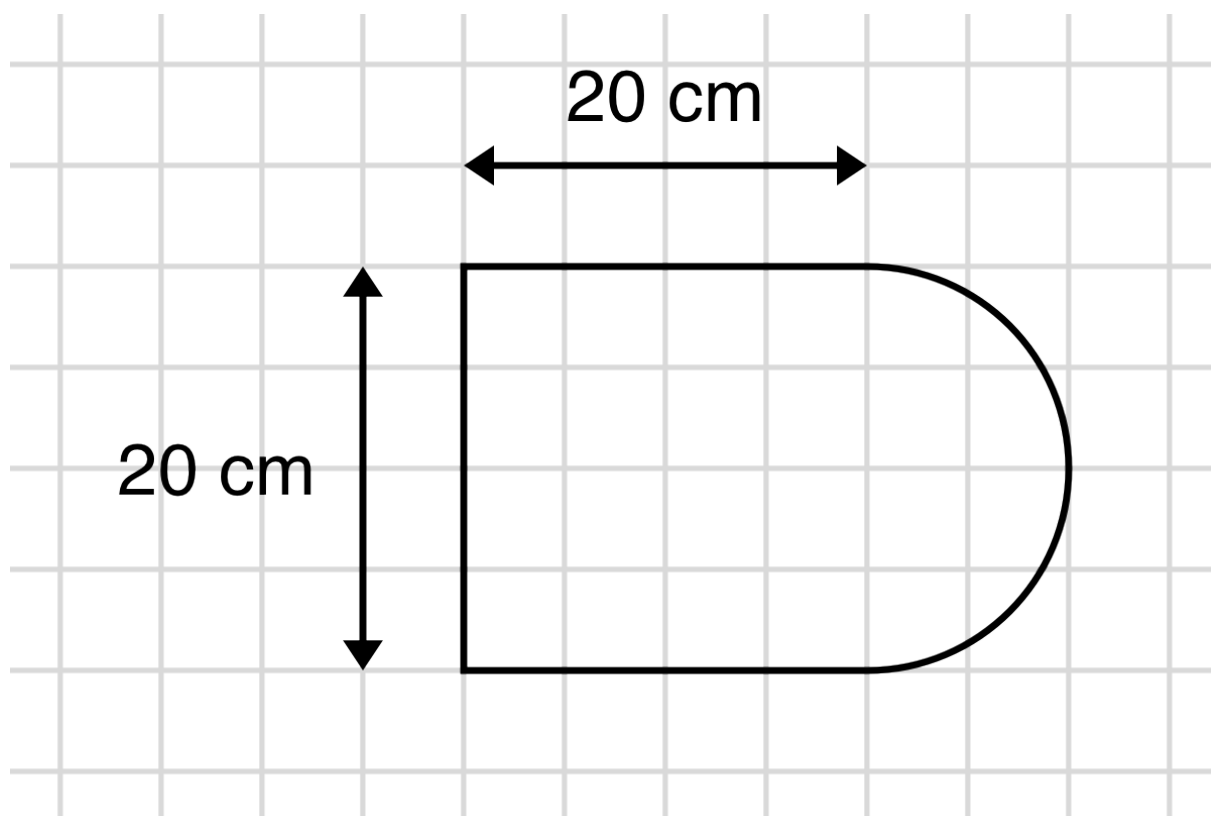
B. $\frac{8}{28}$

C. $\frac{15}{11}$

D. $\frac{41}{28}$

**Zadanie 7. (egzamin gimnazjalny 2012)**

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.



Powierzchnia tej deski (w cm^2) jest równa

- A. $400 + 50\pi$
- B. $40 + 50\pi$
- C. $400 + 100\pi$
- D. $40 + 100\pi$

Otwierając zadanie, obliczamy pole figury na rysunku jako sumę pola kwadratu o boku 20 cm i pole półkola o promieniu 10 cm: $P = 20 \cdot 20 + \frac{1}{2} \pi \cdot 10^2 = 400 + 50\pi \text{ cm}^2$.

Zauważamy, że pole figury na rysunku jest większe od pola kwadratu (400 cm^2), zatem odpowiedzi B i D od razu odrzucamy. Pole półkola jest wyraźnie mniejsze niż pole kwadratu, zatem odrzucamy dystraktor C (100π to w przybliżeniu 314, czyli jest to wartość zbyt bliska 400). Najbardziej prawdopodobną odpowiedzią jest odpowiedź A.

**Zadanie 8.** (egzamin gimnazjalny 2012)

Cena płyty kompaktowej po 30% obniżce wynosi 49 zł. Cena tej płyty przed obniżką była równa

- A. 14,70 zł
- B. 34,30 zł
- C. 63,70 zł
- D. 70zł

Rozwiązanie tego zadania przez otwarcie sprowadza się do działania $49/0,70 = 70$ (70% jakiej liczby jest równe 49?), które jednak dla ucznia w wieku gimnazjalnym nie jest oczywiste – łatwiejsze jest proste obliczanie procentu z danej liczby. W przypadku tego zadania dwa pierwsze dystraktory są od razu do odrzucenia, bo cena po obniżce nie może być przecież większa niż cena przed obniżką. Zatem wystarczy sprawdzić, której z liczb – C. lub D. – 70% jest równe 49, wtedy odpowiedź D. jest oczywista i łatwa rachunkowo ($0,7 \cdot 70 = 49$).

Zadanie 9. (matura PP 2016)

Czternasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a różnica tego ciągu jest równa $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Siódmy wyraz tego ciągu jest równy

- A. $\frac{37}{2}$
- B. $-\frac{37}{2}$
- C. $-\frac{5}{2}$
- B. $\frac{5}{2}$

Rozwiązanie przez otwarcie:

$$a_{14} = a_1 + 13r$$

$$a_7 = a_1 + 6r$$

$$a_{14} - a_7 = 7r$$

$$a_7 = a_{14} - 7r$$

$$a_7 = 8 - 7 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$



Rozwiązanie przez eliminację: ciąg arytmetyczny podany w zadaniu jest malejący, zatem wyraz a_7 jest dodatni i większy od $a_{14} = 8$. Jedynym dystryktorem spełniającym ten warunek jest odpowiedź A.

Jak wspomniano wcześniej, każde zadanie zamknięte można rozwiązać metoda odkrywania, można je „otworzyć”. Tylko czy zawsze warto?

Czy w codziennej praktyce szkolnej uczniowie poznają różne metody rozwiązywania zadań? Wspomniane wcześniej badania IBE pokazują, że nie.

(...) bardzo rzadko uczniowie mogli na lekcjach zobaczyć kilka sposobów rozwiązania tego samego problemu. W kilku przypadkach, gdy to się zdarzyło na obserwowanych lekcjach, nauczyciel po prostu informował, że zadanie można inaczej rozwiązać albo, nie będąc zadowolonym ze sposobu rozwiązania zadania przez ucznia, pokazywał inny, lepszy jego zdaniem sposób. W sytuacjach, gdy mówił o innych możliwych rozwiązaniach, to tego innego rozwiązania nie przedstawiał dokładnie – co najwyżej skrótowo je opisywał” (Por. Karpiński, Grudniewska, Zambrowska, 2013).

O stawianiu celów

Tworząc sytuację pozwalającą na konstruowanie wiedzy matematycznej, musimy zakotwiczyć ją w wiedzy posiadanej już przez ucznia oraz, jeśli tylko to jest możliwe, w jego życiowym doświadczeniu.

Aby uczeń był świadomym i aktywnym uczestnikiem procesu kształcenia, musi wiedzieć, czego i po co ma się uczyć. Dlatego cele zajęć warto zawsze formułować w języku zrozumiałym dla uczącego się.

Gdy mówimy o formułowaniu celów, najczęściej mamy na myśli cel zajęć z punktu widzenia nauczyciela, tzw. cel SMART. Jednak takie zamierzenie jest często opisywane w niezrozumiałym dla ucznia języku, co obrazuje tabela:

Tab. 1. Cele zajęć rozumiane przez nauczyciela i ucznia

Cel nauczyciela	Cel dla ucznia
Uczeń potrafi obliczyć liczbę na podstawie jej procentu	Oczekuję, że po tej lekcji każdy z was będzie potrafił znaleźć liczbę, gdy zna tylko jej procent. Przyda się to m.in. do obliczenia ceny towaru przed podwyżką, do uzupełniania zniszczonej faktury VAT,...
Uczeń poprawnie stosuje algorytm pisemnego dodawania liczb naturalnych	Nauczysz się, jak dodawać do siebie duże liczby
Uczeń potrafi oszacować sumę kilku liczb	Na zajęciach dowiesz się, ile mniej więcej zapłacisz za swoje zakupy, czy wystarczy ci na nie pieniędzy, ile mniej więcej będą ważyły kupione produkty



Cel nauczyciela	Cel dla ucznia
Uczniowie potrafią obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia w modelu klasycznym	O zdarzeniach bardziej lub mniej prawdopodobnych, pewnych i niemożliwych uczyliście się już w szkole podstawowej. Na tych zajęciach pogłębicie swoją wiedzę dotyczącą rachunku prawdopodobieństwa, przeprowadzicie doświadczenia losowe bardziej skomplikowane niż dotychczas i policzycie ich prawdopodobieństwa
Uczniowie rozpoznają siatki brył, potrafią je konstruować	Na zajęciach nauczycie się rozpoznawać, z których figur można zbudować bryłę, a z których nie. Spróbujemy znaleźć odpowiedź na to pytanie także bez próby składania bryły. Zaprojektujecie siatkę bryły i sprawdzicie, czy projekt był dobry, kiedy będziecie składać z niej bryłę.
Uczniowie szkicują wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, korzystając z wykresu funkcji $f(x)$	Na zajęciach zbadacie, jak zmienia się wykres funkcji $y = f(x)$, jeśli będziemy zmieniali znaki argumentów funkcji, znaki wartości funkcji, a także będziemy dodawali liczby do argumentu lub do wartości funkcji. Do obserwacji zmian wykorzystamy komputery.
Rozwiązywanie zadań tekstowych prowadzących do równań kwadratowych, dotyczących związków: prędkości, drogi, czasu	Zajmiemy się zależnościami prędkości, drogi i czasu. Sprawdzimy, jak zmiana jednej z tych wielkości wpływa na pozostałe. Po zakończeniu zajęć będziecie potrafili rozwiązać np. takie zadanie: „ <i>Pewien rowerzysta przebył zaplanowaną trasę o długości 200 km, pokonując w ciągu każdej godziny jazdy tę samą liczbę kilometrów. Gdyby rowerzysta mógł przeznaczyć na tę wyprawę o 2 godziny więcej, to w ciągu każdej godziny mógłby przejeżdżać o 5 km mniej. Obliczymy, z jaką średnią prędkością jechał ten rowerzysta.</i> ”

Takie przeformułowanie celów zajęć nie jest łatwe, niewątpliwie wymaga wiedzy i doświadczenia. Trzeba jednak przyznać, że z punktu widzenia ucznia stwierdzenie: „obliczanie liczby na podstawie jej procentu” jest mało interesujące, więc nie mobilizuje do uczenia się i do aktywnego zdobywania wiadomości.

Nauczyciel konstruktysta

Warto zatem zadać pytanie, kim jest nauczyciel konstruktysta. Pedagodzy podają różne definicje i tworzą katalogi cech. Przyjrzyjmy się jednemu z takich katalogów. Renata Michalak i Elżbieta Misiorna (2003) w cytowanym wyżej artykule opracowały swoiste zasady postępowania idealnego nauczyciela konstruktysty:

- Nauczyciel konstruktysta interesuje się posiadaną już wcześniej przez ucznia wiedzą na dany temat.
- Nauczyciel konstruktysta akceptuje i pobudza autonomię uczniów.
- Nauczyciel konstruktysta pozwala uczniom na przyjmowanie odpowiedzialności.
- Nauczyciel konstruktysta inspirowanie myślenie uczniów poprzez stawianie otwartych pytań.
- Nauczyciel konstruktysta wprowadza uczniów w świat sprzeczności.
- Nauczyciel konstruktysta zachęca do dialogu zarówno z sobą samym, jak i między uczniami.
- Nauczyciel konstruktysta w dialogu z uczniami stosuje terminologię poznawczą, taką jak: „zanalizuj”, „porównaj”, „sklasyfikuj”, „zinterpretuj”, „postaw hipotezę”, „zweryfikuj przypuszczenia, zmienne zależne i niezależne” itp.



- Nauczyciel konstruktysta w swej pracy wykorzystuje dużo surowych danych, materiałów źródłowych.
- Nauczyciel konstruktysta jest cierpliwy w oczekiwaniu na odpowiedź po zadanych pytaniach, zostawia uczniom czas na budowanie związków.
- Nauczyciel konstruktysta pielęgnuje naturalną ciekawość uczniów.

Powyższe „przykazania” można skonkludować, że nauczyciel konstruktysta ma przede wszystkim nauczyć... uczenia się.

Punkt, który mówi o pozwalaniu uczniom na przyjmowanie odpowiedzialności, wymaga szczególnej uwagi. Bardzo często nauczyciele wskazują, że uczniowie nie czują się odpowiedzialni za swoje uczenie się, co potwierdzają badania IBE (Por. Karpiński, Grudniewska, Zambrowska, 2013):

„Na obserwowanych lekcjach matematyki, ale także w wielu innych sytuacjach szkolnych uderzające jest poczucie uczniów, że za ich zachowanie na lekcjach, ich osiągnięcia, a także za ich błędy i porażki odpowiada nauczyciel, a nie oni sami. Ta postawa wzmacniana jest przez samych nauczycieli poprzez sposób prowadzenia lekcji, a także przepisy i dokumenty regulujące pracę szkoły”.

Tymczasem podstawowe założenie konstruktysty, mówiące o tym, że uczeń jest aktywnym podmiotem procesu uczenia się, wymaga ponoszenia za ten proces pełnej odpowiedzialności. Jak przygotować do tego uczniów w dobie egzaminów zewnętrznych oraz oceniania szkoły i nauczycieli przez pryzmat wyników tych egzaminów? Na pewno nie jest to zadanie dla jednego nauczyciela. I nie da się osiągnąć zadowalających efektów takich zadań w krótkim czasie.

Proces wzbudzania u uczniów satysfakcji z wysiłku intelektualnego, świadomości i odpowiedzialności za własne uczenie się wymaga zaangażowania obu stron: ucznia i nauczyciela. Potrzebuje także czasu, aktywnej postawy wszystkich nauczycieli i rodziców. A przede wszystkim musi rozpocząć się jak najwcześniej. Uczeń, który przez wiele lat pobytu w szkole przyjął bierną postawę i uważa, że to nauczyciel ma go wszystkiego nauczyć, nie stanie się przecież nagle aktywny i odpowiedzialny.

Zmiana relacji nauczyciel – uczeń, jak każda zmiana jakościowa, może napotkać różne trudności.

Przykłady charakterystyk odnoszące się do profesjonalnej świadomości nauczycieli, które w sposób znaczący mogą obniżać zdolność kadr pedagogicznych do zmiany swojego stylu nauczania (Por. Klus-Stańska, 2002):

- powierzchowność analiz aktywności szkolnej tak własnej, jak uczniów, przejawiająca się w koncentracji na zewnętrznych zachowaniach i zewnętrznych atrybutach nauczania i uczenia się,



- niespójność deklaracji i działań nauczycieli, co oznacza życzeniowy charakter diagnozowania własnej pracy przez nauczycieli oraz wysoką tolerancję na jawne sprzeczności między zamierzeniami a podejmowaną aktywnością,
- inercyjność technik działania, wyrażająca się w bezwładnym powracaniu do stosowanych wcześniej sposobów pracy mimo chęci odejścia od nich i zanegowania ich trafności.

Czy warto być nauczycielem konstruktywistą? Na to pytanie każdy pedagog musi odpowiedzieć sobie sam. Jednak doświadczenia tych, którzy ten styl pracy stosują, jednoznacznie wskazują, że dostarcza on wiele satysfakcji.

Konstruktywistyczne podejście do nauczania matematyki w szkole

Decyzja o przyjęciu konstruktywistycznego podejścia do nauczania – uczenia się w szkole nie jest łatwa. Wymaga czasu, pracy i wielu zmian. Spójrzmy na konkretny przykład.

Dwa pierwsze kroki na drodze zmian sposobu nauczania należą do nauczycieli, nie tylko nauczycieli matematyki.

Krok 1. Przegląd zasobów ludzkich

Warto zacząć od rozmowy o tym, co nauczyciele wiedzą na temat konstruktywizmu w edukacji matematycznej; jaką znają literaturę, czy uczestniczyli w kursach, konferencjach, warsztatach. Czy stosują konstruktywizm na zajęciach, jak często, z jakimi efektami? Taki przegląd pozwoli na planowanie wstępnej wymiany doświadczeń wśród nauczycieli.

Krok 2. Przegląd zasobów materialnych

Czy nauczyciele mają materiały, najlepiej przez siebie sprawdzone, które pomagają w przygotowaniu i prowadzeniu zajęć w stylu konstruktywistycznym, jakich przedmiotów, działów, treści te materiały dotyczą? Czy posiadają materiały nt. konstruktywizmu w edukacji: książki, prezentacje, karty pracy?

Krok 3. Sojusznicy wewnątrzni

Jak wspomniano wcześniej, nie da się zachęcać uczniów do wysiłku intelektualnego i przyjmowania odpowiedzialności za własne uczenie się wyłącznie na kilku zajęciach matematyki tygodniowo. Aby działanie takie było efektywne, potrzebna jest współpraca wielu, o ile nie wszystkich, nauczycieli oraz zrozumienie ze strony rodziców. Nie do przecenienia jest ponadto rola dyrektora szkoły – to dyrektor może zbudować atmosferę współpracy i zaufania wobec nowej koncepcji nauczania – uczenia się; współpracy innych nauczycieli oraz rodziców.



Krok 4. Sojusznicy zewnętrzni

Jednym z pierwszych działań po podjęciu decyzji, że szkoła ma stać się szkołą ćwiczeń, powinno być opracowanie „mapy” zewnętrznych sojuszników i przypisanie im ról. Szkoła ćwiczeń musi współpracować z **uczelnią wyższą** i specjalistami w zakresie kształcenia konstruktywistycznego – jakość pracy nauczycieli nad wdrożeniem lub rozszerzeniem idei konstruktywizmu wymaga wsparcia teoretycznego. Nie do przecenienia może być współpraca z pracownikami naukowymi, którzy prowadzą badania w szkołach. Można wraz z nimi przygotowywać narzędzia do obserwacji zajęć i ewaluacji. Interesującą opcją są także projekty badawcze, jeśli nauczyciele chcieliby prowadzić własne badania nad swoją praktyką, tzw. action research. Współpraca z uczelnią może ponadto owocować udziałem nauczycieli szkoły ćwiczeń w seminariach, np. katedr czy zakładów dydaktyki nauczania matematyki, podczas których mogliby prezentować efekty swojej pracy. Naturalnym obszarem współpracy szkoły ćwiczeń z uczelnią będzie opracowanie zasad i form praktyk studenckich – śródrocznych i ciągłych.

Innego rodzaju wsparcia udzielić może **placówka doskonalenia nauczycieli**. O ile uczelnia może wspierać pedagogów w poszerzaniu i pogłębianiu wiedzy teoretycznej, o tyle placówka taka pomaga w znalezieniu i zaproszeniu do współpracy nauczycieli praktyków, którzy mają doświadczenie w konstruktywistycznym podejściu do edukacji matematycznej. Ośrodek doskonalenia nauczycieli może pomóc w organizowaniu spotkań wymiany doświadczeń, warsztatów i kursów. Warto zaplanować pomoc takiej placówki także w przypadku szkoleń organizowanych w szkole w ramach wewnątrzszkolnego doskonalenia – ekspert zewnętrzny bywa często bardzo skuteczny we wprowadzaniu nowych idei w sposób funkcjonowania danej szkoły.

Jeśli w danym regionie istnieje sieć współpracy szkół ćwiczeń, bardzo dobrym rozwiązaniem, umożliwiającym zarządzanie siecią z perspektywy całego regionu, jest przekazanie moderacji pracownikowi placówki doskonalenia nauczycieli. Pracownicy ośrodka doskonalenia nauczycieli mogą być, podobnie jak pracownicy uczelni, dużym wsparciem dla szkoły w projektowaniu ewaluacji, konstrukcji narzędzi do obserwacji lekcji, moderowaniu warsztatów i dyskusji.

Nawiązanie współpracy z **biblioteką pedagogiczną** może z kolei przyczynić się do pozyskania szybkiej informacji o nowych publikacjach dotyczących konstruktywizmu, prowadzonych badaniach na ten temat oraz dostępnych edukacyjnych zasobach otwartych, które mogą wzbogacać warsztat dydaktyczny i pedagogiczny nauczycieli szkół ćwiczeń.

Poradnia psychologiczno-pedagogiczna może służyć wsparciem przy planowaniu pracy uczniów ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi, tak, by stali się oni aktywnymi uczestnikami procesu uczenia się. Jest to szczególnie ważne, gdy w związku z wdrażaniem idei konstruktywizmu ulegną zmianie niektóre metody pracy na zajęciach.

Ważnym sojusznikiem we wdrażaniu konstruktywizmu do codziennej praktyki mogą być **szkoły oraz organizacje pozarządowe**, które uczestniczyły/uczestniczą w projektach



dotyczących tego zagadnienia. Ich doświadczenie, sukcesy i porażki mogą być bezcenne w planowaniu działań szkoły ćwiczeń.

Gdy decyzja o zmianie sposobu nauczania w ramach organizowania szkoły ćwiczeń w zakresie matematyki zostanie podjęta, należy zatroszczyć się o plan działania i odpowiedzieć na ważne pytania, np.

- Co będziemy robić jako szkoła ćwiczeń?
- Jakie będą nasze formy pracy?
- Z kim będziemy współpracować?
- Co możemy zrobić sami, a do czego potrzebujemy pomocy?
- Co musimy zrobić, by nowe zadania i obowiązki nie burzyły codziennej pracy szkoły?

Jeśli jednym z zadań szkoły będzie wdrożenie konstruktywistycznego podejścia do edukacji matematycznej, konieczne stanie się inne spojrzenie na program nauczania i wszystkie pochodne mu dokumenty, np. rozkład materiału, plan wynikowy, przedmiotowy system oceniania.

To nowe spojrzenie na dokumenty programowe powinno obejmować co najmniej cały rok szkolny – najlepiej byłoby jednak dokonać przeglądu na cały etap kształcenia. Rozwijanie u uczniów takich kompetencji jak aktywność, odpowiedzialność i umiejętność uczenia się nie może być incydentalne i przypadkowe. Trzeba je starannie zaplanować: ustalić, na jakich przedmiotach nauczania i przy których tematach możemy/potrafimy zorganizować zajęcia z wykorzystaniem idei konstruktywizmu. Tylko planując, co najmniej w skali roku, możemy robić to systematycznie, mieć czas na przygotowanie odpowiednich materiałów, porozmawiać z koleżankami i kolegami, poprosić ich o obserwację lekcji.

Początkowo prowadzenie takich lekcji będzie dla nauczycieli czasochłonne, choćby ze względu na znalezienie i przygotowanie odpowiednich materiałów edukacyjnych. Jednak z czasem i rosnącym doświadczeniem, dzięki współpracy i wymiany doświadczeń z innymi, przyniesie ogromną satysfakcję i niewymierne korzyści dla uczniów.

Na zakończenie

Efektem działania szkół ćwiczeń ma być m.in. podniesienie kompetencji młodych nauczycieli matematyki oraz studentów kandydatów na nauczycieli, a zatem zmiana ich nastawienia do edukacji matematycznej oraz uczniów.

Nasuwa się więc pytanie o skuteczne lub nieskuteczne działania podejmowane przez szkołę jako społeczność i przez poszczególnych nauczycieli, w które z nich warto się angażować i propagować. Odpowiedzi poszukiwał m.in. prof. Hattie (Hattie, 2015) z Auckland University w Nowej Zelandii. Przeanalizował wraz z zespołem wiele badań naukowych na temat wpływu różnych czynników na osiągnięcia uczniów. Porównywano efekty różnych zmian/reform/interwencji podejmowanych w edukacji. Hattie wyróżnił 138 różnych czynników,



o których mówią badania, np. wielkość klasy, poziom wiedzy przedmiotowej nauczyciela, zaangażowanie rodziców, uczenie się w małych grupach, relacje nauczyciel – uczeń. Czynniki te zostały uporządkowane od najbardziej do mniej efektywnych. Okazało się, że największy wpływ na polepszenie osiągnięć mają sami uczniowie, a konkretnie ich samoocena, ich ambicje. Na drugim miejscu znalazła się ewaluacja formatywna. Rozumiana jest jako podejście, w którym nauczyciel jest otwarty i aktywnie poszukuje informacji zwrotnej od uczniów na temat tego, czy osiąga zamierzone cele nauczania oraz gdzie pojawiają się i czym charakteryzują się problemy, z którymi muszą mierzyć się uczniowie. Na tej podstawie pedagog zmienia swoje działania: dostosowuje treści, metody, dalsze plany. Z punktu widzenia edukacji matematycznej warto zwrócić uwagę, że na piątym miejscu wśród czynników wpływu na osiągnięcia uczniów znalazło się nauczanie w oparciu o rozwiązywanie problemów.

Poniżej w tabeli przedstawiono przykłady różnych czynników wpływających na osiągnięcia uczniów wraz z ich średnią efektywnością.

Tab. 2. Czynniki wpływające na osiągnięcia uczniów i ich efektywność

Interwencja	Średni rozmiar efektu
Samoocena (ambicje)	1,44
Ewaluacja formatywna nauczania	0,90
Informacja zwrotna	0,73
Relacje nauczyciel – uczeń	0,72
Nauczanie w oparciu o rozwiązywanie problemów	0,61
Cele będące wyzwaniem	0,56
Wpływ rówieśników	0,53
Zaangażowanie rodziców	0,51
Uczenie się w małych grupach	0,49
Motywacja	0,48
Zadawanie pytań	0,46
Praca domowa	0,29
Indywidualizacja nauczania	0,23
Liczebność klasy	0,21

Planując pracę szkoły ćwiczeń warto pamiętać o wynikach badań Hattiego i – od czasu do czasu – porównać podejmowane działania z powyższą tabelą, zadając sobie pytania o ich efektywność.



Dowiedz się więcej

1. Więcej o podejściu konstruktywistycznym w nauczaniu, historia idei, polskie doświadczenia w tym zakresie, obszar zastosowania i ewaluacja – [Podejście konstruktywistyczne. Laboratorium dydaktyki cyfrowej](#) [online, dostęp dn. 20.09.2017].
2. Piotr Bołtuć, [Konstruktywizm w e-edukacji oraz jego krytyka](#) [online, dostęp dn. 16.09.2017].

Bibliografia

Bałachowicz J., (2003), *Konstruktywizm w teorii i praktyce edukacji*, Edukacja, 2003/3.

Chodnicki J., Dąbrowski M., (2012), *Matematyka 2001, podręcznik do klasy 4 szkoły podstawowej*, Warszawa: WSiP.

Dąbrowski M., Dubiecka A., Fryska M., (2003), *Matematyka 2001, Poradnik dla nauczyciela klasa 6*, Warszawa: WSiP.

Christensen C. R., (2008), *Każdy student uczy i każdy wykładowca zdobywa wiedzę: wzajemne obdarowywanie się w uczeniu przez dyskusję* [w:] John Stewart (red.), „Mosty zamiast murów. Podręcznik komunikacji interpersonalnej”, Warszawa: PWN.

Dąbrowski M., (2008), *Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*, Warszawa: Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Dylak S. i in., (2011), [Metodyka kształcenia strategią wyprzedzającą](#), praca zbiorowa pod redakcją naukową Stanisława Dylaka [online, dostęp 19.09.2017, pdf 3.32].

Dylak S., (2013), *Architektura wiedzy w szkole*, Warszawa: Difin.

Hattie J., (2015), *Widoczne uczenie się dla nauczycieli. Jak maksymalizować siłę oddziaływania na uczenie się. Biblioteka Szkoły Uczącej Się*, Warszawa: Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Jagodzińska E., (b.r.), [Rola gier i zabaw w procesie nauczania edukacji matematycznej](#) [online, dostęp 17.09.2017, pdf 64.4 kB].

Karpiński M., Grudniewska M., Zambrowska M., (2013), *Raport z badania: nauczanie matematyki w gimnazjum*, Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.



Kawałek A., Młynarska M., Napiórkowska G., Podolak M., Śniezek W., (b.r.), [Nowoczesne metody nauczania – uczenia matematyki i przedmiotów pokrewnych](#) [online, dostęp 18.09.2017, pdf 1.28 MB].

Klus-Stańska D., (2002), *Konstruowanie wiedzy w szkole*, Olsztyn: Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego.

Klus-Stańska D., Kalinowska A., (2005), *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.

Klus-Stańska D., Szymański M. J., Szymański M. S., (2003), *Renesans (?) nauczania całościowego. Współczesna dydaktyka wobec nauczania zintegrowanego, blokowego i przedmiotowego*, Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.

Klus-Stańska D., Łojko M., Hurło L. red., 2009, *Paradygmaty współczesnej dydaktyki*, Kraków: Impuls.

Kwiecień D., (2016), [Efektywne metody nauczania matematyki dla uczniów gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych z wykorzystaniem TIK](#) [online, dostęp 17.09.2017, pdf 1.12 MB], Warszawa: ORE.

Michalak R., Misiorna E., (2003), *Nauczyciel i uczeń w zmieniającej się szkole* [w:] Klus-Stańska D., M. J. Szymański, M. S. Szymański, „Renesans (?) nauczania całościowego. Współczesna dydaktyka wobec nauczania zintegrowanego, blokowego i przedmiotowego”, Warszawa: Wydawnictwo Akademickie Żak.

Szłosek F., (1999), *Gry dydaktyczne*, Warszawa: Wydawnictwo Centralnego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli.

Wiatrak E., (2013), *Pozwólmy dzieciom uczyć się*, Warszawa: IBE.

Spis tabel

Tab. 1. Cele zajęć rozumiane przez nauczyciela i ucznia	32
Tab. 2. Czynniki wpływające na osiągnięcia uczniów i ich efektywność	38

