Zestaw 5

Zeszyt 1

Marek Pisarski

# Jak wykorzystać metody problemowe w edukacji matematycznej?

- Nauczyciel jako coach
- Metoda problemowa i jej rodzaje
- Przykłady zadań problemowych dla uczniów klas IV–VIII
- Zadania konstrukcyjne

Analiza merytoryczna
**Elżbieta Miterka**

Recenzja
**Jolanta Lazar**

Redakcja językowa i korekta
**Anna Wawryszuk**

Projekt graficzny, projekt okładki
**Wojciech Romerowicz, ORE**

Skład i redakcja techniczna
**Grzegorz Dębiński**

Projekt motywu graficznego „Szkoły ćwiczeń”
**Aneta Witecka**

**ISBN 978-83-65967-00-8** (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)
**ISBN 978-83-65967-19-0** (Zestaw 5. Metody poszukujące w edukacji matematycznej w klasach IV–VIII szkoły podstawowej i szkole ponadpodstawowej)
**ISBN 978-83-65967-20-6** (Zeszyt 1. Jak wykorzystać metody problemowe w edukacji matematycznej?)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl



Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

# Spis treści

# Wstęp

Odkąd matematyka stanowi wyodrębnioną dziedzinę wiedzy, czyli od ok. dwóch i pół tysiąca lat, wiadomo, że aby uczyć się matematyki, trzeba rozwiązywać odpowiednio dobrane problemy matematyczne. Wszelka matematyczna wiedza teoretyczna, encyklopedyczna, pamięciowa jest efektem treningu polegającego na stosowaniu coraz to nowych wiadomości i umiejętności podczas rozwiązywania zadań. Ten proces prezentowany jest często w postaci następującej metafory.

Matematyczne struktury umysłu konstruowane są na kolejnych etapach: ich zaburzania przez dostarczanie nowych informacji i porządkowane po ich włączeniu na wyższym poziomie. Aby stanowiły jednolitą, stałą strukturę wiedzy, gotową do pracy nad kolejnymi problemami, struktury te muszą składać się z odpowiednio połączonych „komórek” komunikujących się ze sobą w sposób łatwy i zorganizowany. Powinny być w stanie nie tylko kumulować i przyswajać nowe informacje pod różnymi postaciami, ale także przetwarzać je i porządkować, tworzyć modele i strategie rozwiązań zadań oraz uzasadniać ich poprawność, często przez wskazywanie błędów, czyli niezgodności wyników z warunkami albo procedur z wzorcowymi twierdzeniami.

Matematyka wyodrębniła się jako dziedzina szczególnie zainteresowana porządkiem i poprawnością swoich stwierdzeń. Każde musi w niej wynikać z pewnych wcześniejszych, a na najniższym poziomie z twierdzeń aksjomatów, które przyjmowane są jako pewniki, oraz pojęć podstawowych, których się nie definiuje.

Matematyka jest jednak nie tylko dziedziną wzorcowej poprawności. Jest także dyscypliną, której treści i procedury stanowią wzorzec poprawnego rozumowania dla innych dziedzin. Sposób uczenia się matematyki jest modelem uczenia się w ogóle.

Istotą obu cech matematyki z punktu widzenia celów tego zestawu materiałów jest nastawienie na proces rozwiązywania problemu. Rozpoczyna się on od rozpoznania problemu, kontynuowany jest przez poszukiwanie informacji oraz sposobów ich przedstawiania, opracowywania technik ich przetwarzania, strategii i modeli rozwiązania, a kończy się sprawdzeniem, czy rozwiązanie spełnia odpowiednie warunki, czyli uzasadnieniem, że rozwiązanie jest poprawne.

# Nauczyciel jako coach

Metody poszukujące w dydaktyce to metody samodzielnego uczenia się. Nauczyciel zaraz po rozpoczęciu pracy, po wprowadzeniu w zadanie, usuwa się na bok. Zmienia swoją tradycyjną rolę „szefa na każdym etapie” i staje się osobą wspierającą, doradcą, towarzyszem swoich uczniów, ich trenerem. Porównanie do treningu sportowego nie jest tu bezzasadne. W uczeniu się matematyki ważne są te same cechy, co w sporcie:

- **umiejętność** (wiedza jak),

- **wytrzymałość** (odporność na długotrwały wysiłek, sytuacje trudne i niepowodzenia),
- **szybkość** (sprawność w rozwiązywaniu elementarnych zagadnień pomocniczych),
- **giętkość** (umiejętność wyszukiwania różnych sposobów rozwiązywania problemów, zdolność do wpadania na nowe, twórcze rozwiązania),
- **siła** (zdolność do podejmowania się trudnych zadań).

Ważna jest także, nie tylko w sporcie, ale też matematyce **wola**, czyli wewnętrzna motywacja do zdobywania coraz wyższego poziomu umiejętności, wytrzymałości, giętkości, siły i szybkości. W wypadku matematyki cechy te oczywiście dotyczą umysłu.

Kim staje się uczeń, a kim nauczyciel zaangażowani w proces nauczania/uczenia się metodami poszukującymi? Odpowiadając na to pytanie, zwraca się uwagę na podmiotowe traktowanie ucznia. Nie jest on traktowany jako przedmiot oddziaływań pedagogicznych, kształtowany zgodnie z narzuconym modelem dostosowanym do odgórnych celów nauczania. Jest natomiast osobą współodpowiedzialną zarówno za sam proces zdobywania wiedzy, jak i jego rezultaty. Nauczyciel przyjmuje w tym procesie rolę trenera (coacha) grup współpracujących w ramach wspólnego zadania, który przede wszystkim pomaga i ułatwia uczniom:

- doprecyzować cele pracy zespołu,
- określić zasoby zespołu,
- wskazać ograniczenia zespołu,
- zbudować wewnętrzną spójność grupy,
- znaleźć rozwiązania problemów (ale nie rozwiązuje ich za uczniów),
- zdefiniować plan działania.

W obszarze wzajemnych relacji coach pomaga:

- wygaszać negatywne emocje,
- modelować komunikację w grupie,
- zrozumieć interakcje pojawiające się w zespole i ich wpływ na efekty pracy.

Rolą coacha jest więc wspieranie zespołu w podnoszeniu jego efektywności, zarówno zadaniowej, jak i w obszarze wzajemnych relacji. Mała efektywność zespołu może mieć różne podłoża, np. nieskuteczne procedury działania, brak koncentracji na efektach, zaburzenia w kontaktach interpersonalnych między poszczególnymi członkami zespołu lub między zespołem i jego liderem.

Tomasz Tokarz (2016: 42) pisze o coachingu tak:

> „Coaching to niedyrektywna forma pracy z uczniem, polegająca na towarzyszeniu mu w rozwoju, w procesie poznawania samego siebie, odkrywania własnego potencjału oraz wykorzystywania zdobytej wiedzy dla wyznaczania celów, projektowania sposobów ich osiągania oraz skutecznego realizowania. Coaching wymaga umiejętności słuchania i słyszenia tego, co komunikuje uczeń. Praca coacha polega przede wszystkim

na zadawaniu i przekazywaniu uczniom wartościowych, eksplorujących, otwierających pytań.

Źródeł coachingu szukać można m.in. w psychologii humanistycznej, chociażby w założeniach psychoterapii Carla Rogersa, osadzonej na niedyrektywnym podejściu do pacjenta, na wspieraniu go w tworzeniu własnej narracji o sobie samym i otaczającym świecie. Samo pojęcie coachingu w zakresie używanym obecnie pojawiło się w latach 70. XX w. Dokonało się to m.in. za sprawą Timothy'ego Gallweya, który w książce *The Inner Game of Tennis* przedstawił nową koncepcję pracy w sporcie: pozbawioną krytyki, ocen i osądów. Okazała się ona na tyle skuteczna, że szybko znalazła zastosowanie w innych sferach życia społecznego.

Istotę coachingu stanowi przekonanie, że każdy człowiek jest niepowtarzalną jednostką z własnymi specyficznymi potrzebami i możliwościami. W związku z tym trudno podporządkować go schematom, jednolitym programom rozwojowym, zuniformizowanym skryptom. Sam zna siebie najlepiej i potrzebuje przede wszystkim wysłuchania.

W coachingu drugi człowiek postrzegany jest jako autonomiczny twórca własnego życia, odpowiedzialny za jego bieg jako podmiot, który posiada wrodzone zasoby, ale często nie jest świadomy ich istnienia albo nie potrafi ich odpowiednio wykorzystać. Dlatego potrzebuje u swego boku doświadczonej osoby, która dostarczy mu narzędzi do rozpoznania własnych możliwości.

Coach nie jest doradcą sugerującym jednoznaczne rozwiązania. Nie jest ekspertem, który zawsze wie, czego potrzebuje uczeń (i to lepiej niż on sam), nie przekazuje mu gotowej wiedzy, zapełniając umysł zestawem faktów i umiejętności. On tworzy przestrzeń dla rozwoju, organizuje warunki, w których uczeń odkrywa tkwiące w nim możliwości, lepiej rozumie sytuację, w której się znajduje i jest w stanie zaprojektować swoje działania. Coach pomaga wykreować nowe rozwiązania, ale to od konkretnej osoby zależy, w jakim kierunku ostatecznie podąży".

Nauczyciel, który zamienia się w coacha, musi zatem:

„porzucić klasyczny model swojej roli w procesie nauczania, opierający się na przekonaniu, że młody człowiek jako istota niedoskonała, niedojrzała wymaga uszlachetniającej obróbki, wdrożenia do ugruntowanego systemu wartości i norm, ukształtowania w odpowiednio zorganizowanej przestrzeni – w szkole traktującej ucznia jako obiekt odgórnych oddziaływań, pomijającej jego podmiotowość i niezależność.

Jednak w dalszym ciągu fundamentem założeń oświatowych określających edukacyjną praktykę jest przekonanie o nierównorzędnej pozycji ucznia i nauczyciela. Ten ostatni traktowany jest jako zarządca procesu uczenia się, specjalista wyznaczony do sterowania rozwojem ucznia, zobowiązany do wyposażenia młodego człowieka w określone odgórnie treści, zbiory informacji, umiejętności i wartości. Nauczyciel występuje w roli eksperta, mistrza wprowadzającego ucznia w świat tradycji, kulturowych kodów, pojęć i znaczeń. Cele te realizuje głównie za pomocą metod podawczo-formujących i jednoznacznie panuje nad procesem komunikacji. Zadawane przez nauczyciela pytania nie służą zazwyczaj temu, by dowiedzieć się czegoś nowego od ucznia, by poznać jego interpretacje, opinie, poglądy, świat jego wartości, jego aspiracje, marzenia, cele, blokady. Pytania wykorzystywane są przede wszystkim po to, by zweryfikować stopień przyswojenia materiału. Kontrastuje to mocno z zasadami coachingu, gdzie jedno z podstawowych haseł brzmi: »Pytanie nie jest pytaniem, jeśli znasz odpowiedź«.

Oparcie pracy nauczyciela na modelu coachingowym wymaga więc diametralnej zmiany podejścia do ucznia – należy zmierzać do uznania jego pełnej podmiotowości. Wiąże się to z likwidacją ugruntowanej hierarchii, zniesieniem dominacji, pozbyciem się stosunku władza vs wykonawca poleceń i zastąpienia ich relacjami opartymi na współdziałaniu, wzajemnym szacunku, zaufaniu i akceptacji. W takim ujęciu rola nauczyciela pozostaje kluczowa, ale nie jako uprawomocnionego zewnętrznie decydenta rozwoju ucznia, lecz jako organizatora procesu kształcenia, odpowiedzialnego za jego przebieg i strukturę (w mniejszym stopniu za efekty), projektanta środowiska rozwojowego, samodzielnie wybranego przez ucznia!

Zbudowanie relacji szkolnych na założeniach coachingu wiąże się z uznaniem faktu, że każdy uczeń jest wyjątkowy, co pozwala odejść od pracy na deficytach na rzecz zaakcentowania mocnych stron ucznia, prowadzi do autentycznego zainteresowania światem dziecka, jego zainteresowaniami i aspiracjami, a także wiąże się z odrzuceniem krytyki i nagany na rzecz szukania pozytywnych intencji. Wdrożenie takiego modelu pracy niewątpliwie prowadzi do zwiększenia poczucia odpowiedzialności młodych ludzi za własne wybory. Jak pisał Alfie Kohn, »podejmowania decyzji możemy nauczyć się tylko przez podejmowanie decyzji, nie przez słuchanie poleceń«. Coaching sprzyja rozwijaniu umiejętności samodzielnego myślenia i radzenia sobie z wyzwaniami, jakie niesie ze sobą życie.

**Realizacja podejścia coachingowego oznacza konieczność przemiany samego nauczyciela. Porzucenia roli formalnego autorytetu, by od nowa i w autorski sposób budować pozycję wobec ucznia. Wejście w kostium coacha wymaga przestawienia się:**

- z podejścia ustandaryzowanego na spersonalizowane (dostrzeżenia w uczniu człowieka z określonymi niepowtarzalnymi zasobami, talentami, możliwościami),
- z traktowania ucznia jako naczynia do wypełnienia wiedzą na postrzeganie go jako podmiotu, który rozwija się swoim rytmem,
- z mówienia na słuchanie (i usłyszenie tego, co uczeń czuje, myśli, co sądzi o otaczającym świecie),
- z nauczania (rozumianego jako przekaz treści) na tworzenie przestrzeni do samodzielnego uczenia się (rozwijania potencjału, szukania odpowiedzi w sobie),

- z tendencji do zadawania pytań zamkniętych (z jedną odpowiedzią) na zadawanie pytań otwartych, eksplorujących, które skłaniają do myślenia, skonfrontowania się z samym sobą i posiadaną wiedzą,

- z oceniania i osądzania na informowanie o postępach (na życzenie ucznia)" (Tokarz, 2016: 43).

Tomasz Tokarz dostrzega też trudności w realizacji metod cochingowych w polskich szkołach, w których bardzo silnie ugruntowany jest paradygmat oparty na ocenianiu, rywalizacji, testach i rankingach. Wydaje się, że z każdym rokiem coraz bardziej się utrwala. Trudno oderwać się od powszechnie obowiązujących wzorców i modeli współpracy. Szkoła jest bowiem elementem państwowego systemu i podlega prawu oświatowemu, które wyznacza przed każdym nauczycielem i uczniem konkretne cele oraz rozlicza z ich realizacji.

Wiadomo także, że nasi uczniowie nie są dojrzałymi, niezależnymi podmiotami, już ukształtowanymi i świadomymi celów, wyzwań i życiowej drogi. Na ile taki uczeń jest zdolny podjąć się zadań, jakie przed nim stawiamy? Na ile jest w stanie realizować pożyteczne dla siebie cele? Przecież każdy z uczniów potrzebuje autorytetu, mistrza, który przekaże mu wiedzę i fundament wartości. Kogoś starszego, silniejszego, bardziej odpowiedzialnego, kto „określi, co jest dobre, a co złe". Wreszcie kogoś, kto w trudnej sytuacji rozwiąże problem, wytłumaczy, wskaże błąd i pomoże go poprawić.

Ostatecznie wszystko jest kwestią wyczucia i umiaru. Wiadomo, że nagła zmiana metody nauczania nie będzie korzystna. Uczniowie, których pewnego dnia wita w szkole coach, chociaż spodziewali się nauczyciela, poczują się porzuceni, zagubieni i zdezorientowani. Ważne jest zatem, aby cenne metody coachingowe były wprowadzane stopniowo, najpierw w niewielkim zakresie, tylko na wybranych lekcjach lub zajęciach, niekoniecznie z całą klasą. Nauczyciel etapami będzie wychodził ze swojej roli, od czasu do czasu postawi uczniów wobec problemu, z którym będą musieli poradzić sobie sami.

Z czasem dostrzegą oni profity wynikające z takich sytuacji: większa swoboda, brak oceniania, okazja do głębszego wniknięcia w sam proces rozwiązywania, nie zaś powierzchowne bazowanie na konkretach.

Na dłuższą metę działanie oparte na modelu autorytarnym daje niepożądane skutki. Prowadzi do uzależnień od zewnętrznych źródeł wsparcia. Absolwenci autorytarnych szkół także poza szkołą będą oczekiwali, że ktoś doradzi, pocieszy, wskaże, pomoże, da oparcie. Będą szukali wsparcia kogoś, kto ma władzę i autorytet, „ma właściwą narrację", kto rozdziela różne dobra. Z drugiej strony, ci nieliczni będą stawali się niebezpiecznymi autorytetami, które bezwzględnie wykorzystują swoją przewagę nad słabszymi.

Wiadomo przecież nie od dziś, że dobrego nauczyciela cechuje otwartość na uczniów, szczere zainteresowanie nimi, umiejętność słuchania i usłyszenia, co mają do powiedzenia, a także zdolność uczenia się od nich. Coaching wydaje się tu kolejną, naturalną, wręcz konieczną fazą pedagogicznego rozwoju. Także w obecnej szkole można spotkać nauczycieli spontanicznie zmieniających swoje role w ramach cyklu nauczania. Przecież nie sposób traktować czwartoklasistę tak samo jak szósto- czy ósmoklasistę.

## Techniki coachingu

„W pracy z dziećmi można realizować różne techniki coachingu. Przykładem narzędzia jest model GROW. Polega on na uważnej rozmowie z uczniem, dotyczącej konkretnego zadania, osiągania określonej kompetencji, zdobywania przydatnych mu umiejętności. Punktem wyjścia jest **ustalenie celów**, do jakich chce zmierzać młody człowiek. Powinny być one sformułowane w sposób pozytywny, czyli zawierać w sobie to, co uczeń chce osiągnąć, a nie to, czego chce uniknąć. Drugim krokiem jest próba **diagnozy obecnej sytuacji**, oszacowania, w jakim miejscu znajduje się uczeń, jakie rozwiązania już przetestował, jakie są różnice między stanem istniejącym a pożądanym, a także – z czego wynikają (przykładowo mogą być związane z brakiem wiedzy, aspiracji, motywacji, niewiarą we własne siły czy możliwości). Po tym etapie następuje **analiza możliwych rozwiązań**, opcji, jakie przychodzą do głowy, bazujących na zasobach, jakie posiada uczeń. Końcowym etapem pracy jest rozmowa na temat zastosowań wybranej opcji. Uczeń **planuje sposoby działania**, wyznacza konkretne terminy, ustala harmonogram realizacji celów. Nauczyciel – jednocześnie coach – jest swego rodzaju strażnikiem ich dotrzymywania.

**G – GOALS (cele)**: Co chcesz osiągnąć?

**R – REALITY (rzeczywistość)**: Jak wygląda twoja obecna sytuacja?

**O – OPTIONS (opcje)**: Jakie masz możliwości?

**W – WILL (wybór)**: Co zrobisz, by osiągnąć swój cel?

Cel wybrany przez ucznia powinien być zbudowany na coachingowym modelu SMART, czyli musi być:

- **S – szczegółowy**: jasno określony, konkretny, jednoznacznie sformułowany,
- **M – mierzalny**: sformułowany tak, by można było określić jego sprawdzalność,
- **A – atrakcyjny**: interesujący, budzący ciekawość i chęć do działania,
- **R – realistyczny**: możliwy do osiągnięcia.

Proces wyznaczania celów w coachingu jest zbliżony do systemu sprawności harcerskich. Uczeń formułowałby pewien obszar kompetencyjny, w którym by się doskonalił, określałby punkty docelowe, a następnie wyznaczał etapy ich realizacji.

Coaching jest nie tylko określoną metodą pracy z uczniem, lecz całościowym modelem podejścia do człowieka, budowania interakcji, wchodzenia z nim w relacje. Przenosi odpowiedzialność za rozwój z nauczyciela na ucznia. Pozwala mu na samodzielne określenie celu edukacyjnego i opracowanie sposobu jego rozwiązania. Dzięki niemu młody człowiek ma możliwość analizy działań i poszukiwań rozwiązań, które pomogą mu zmierzyć się z trudnościami. Coaching umożliwia dotarcie do samego siebie, odkrycie swoich atutów i zdolności, jak również deficytów i słabości, poznania indywidualnego stylu interpretowania świata, co trudno osiągnąć za pomocą konwencjonalnych metod dydaktycznych. Podstawą sensownej pracy nauczycielskiej jest udzielenie młodym ludziom wsparcia w procesie rozwoju osobowego, budowania poczucia własnej wartości, kształtowania szacunku do siebie i innych. Coaching jest świetną odpowiedzią na te potrzeby" (Tokarz, 2006: 45).

Praca metodami coachingowymi pomaga więc uczniom wyrabiać w sobie cenne postawy i umiejętności takie jak:

- zdyscyplinowanie w pracy,
- nadawanie ram i porządku podejmowanym działaniom,
- komunikacja oraz współpraca rozumiana także jako uczenie się od siebie nawzajem.

Praca ta także zwiększa skuteczność wykonywanych czynności oraz wydobywa potencjał intelektualny i społeczny drzemiący w uczniach.

Wyróżnia się dwa podejścia do coachingu, zarazem jego rodzaje: zespołowy i grupowy. Różnice między nimi wyjaśnione są w tabeli (Tab. 1):

Tab. 1. Porównanie rodzajów coachingu

| Coaching zespołowy | Coaching grupowy |
|---|---|
| Cały zespół jest podopiecznym (podmiotem). | Każda osoba indywidualnie jest podopiecznym (podmiotem). |
| Jest wspólny cel dla wszystkich członków zespołu. | Nie ma wspólnego celu.<br>Każdy członek grupy koncentruje się na własnych, indywidualnie doprecyzowanych celach. |
| Rola coacha polega na ułatwianiu przebiegu procesu osiągania wspólnego rezultatu. | Rola coacha polega na dobraniu konkretnych narzędzi i technik stosownie do tematu. |
| Zespołowy zysk.<br>Wszyscy członkowie zespołu powinni brać udział w całym procesie. | Indywidualny zysk.<br>Każdy członek grupy powinien wynieść coś dla siebie. |
| Zastosowane narzędzia ułatwiają i wspierają zespół w osiąganiu kolejnych etapów założonego celu. | Zastosowane narzędzia pozwalają ulepszyć wyniki każdego członka grupy nie tylko w miejscu pracy, w szkole, ale także w życiu codziennym. |
| W szkole najczęściej stosowany w celach:<br>• reprezentacyjnych (np. promocja szkoły, organizacja imprez itp.),<br>• rozwojowych, kompetencyjnych, relacyjnych (np. poprawa komunikacji w zespole). | Najczęściej stosowany w realizacji celów rozwojowych, osobistych. |
| Jest lider zespołu, coach wspiera lidera, ale nie podejmuje za niego decyzji. | Część interakcji zachodzi na płaszczyźnie grupowej, część natomiast w formie indywidualnej. |

W naszych materiałach będziemy używali pojęcia coachingu w znaczeniu coachingu grupowego.

# Metoda problemowa i jej rodzaje

## Sposoby realizacji metody problemowej w edukacji matematycznej

Problem zazwyczaj rozumiemy jako trudność praktyczną i teoretyczną, która staje przed nami i którą musimy pokonać. Wiemy też, że strategia oparta na obejściu problemu, odsunięciu go w bliżej nieokreśloną przyszłość nie jest dobrą taktyką. Aby rozwiązać problem, nie wystarczy oprzeć się na gotowym rozwiązaniu (będzie to jeszcze jedna taktyka typu obejście). Trzeba włożyć własny wysiłek, zdobyć się na aktywność, dać się wchłonąć zadaniu, spolaryzować na nim.

Początkowy dyskomfort wynikający z braku gotowej odpowiedzi na poszukiwane pytanie (przypomnijmy, że jeśli znamy odpowiedź, to nie jest to dobre zadanie) przetwarzamy na procedury polegające na eliminacji lub zmniejszeniu dyskomfortu przez wzięcie byka za rogi, czyli podjęcie wyzwania. Jeśli mu sprostamy, zasoby naszej wiedzy (wiadomości i umiejętności) się powiększą.

Problem ma najczęściej postać pytania lub zadania. Zwykle nie prezentujemy w nim wszystkich potrzebnych do rozwiązania danych. Uczeń podejmujący się rozwiązania problemu musi wykazać się aktywnością poznawczą i odpornością emocjonalną, jednocześnie obie doskonali, kiedy pracuje nad problemem. Problem powinien mieć w sobie coś intrygującego, zaciekawiać ucznia, skłaniać do aktywności.

Nauczanie problemowe jako jedna z metod poszukujących stawia ucznia w centrum procesu uczenia się. Proces ten zawiera silną indywidualną składową, ale też opiera się na współpracy w grupie. Wykorzystanie technik pracy grupowej jest zatem konieczne. W nauczaniu problemowym przywiązuje się dużą wagę do prowadzenia badań, obserwowania i opisywania ich efektów oraz refleksji uczniów na temat otrzymanych rezultatów. Zanim uczniowie przedstawią swoje wyniki rozwiązania problemów swojemu nauczycielowi/coachowi, sami powinni sprawdzić, czy nie ma w nich nieścisłości, błędów. Sami, w razie ich wykrycia, powinni je poprawić.

Nauczanie problemowe to metoda, która z założenia skłania ucznia do samodzielnego poszukiwania rozwiązań. Brak symptomów samodzielnej pracy oznacza, że nie przynosi spodziewanych rezultatów. Nauczyciel/coach przygotowuje i prezentuje materiały opisujące problem, formułuje go, a po rozwiązaniu dodaje ciekawe, nowe problemy związane z już rozwiązanym.

Przygląda się też pracy uczniów, pomaga, czasem wyraża wątpliwości, wskazuje miejsca wymagające uwagi lub usterki w rozumowaniu, kolejne obszary poszukiwań. Sam jednak nie jest źródłem informacji.

Według W. Okonia (1964) nauczanie problemowe jest więc sekwencją kilku czynności:

1. Organizowanie sytuacji problemowych.

2. Indywidualne lub grupowe rozwiązywanie problemów.

3. Weryfikacja uzyskanych rozwiązań.

4. Systematyzowanie, utrwalanie i stosowanie rozwiązań w nowych sytuacjach.

Za twórcę nauczania problemowego możemy uznać Johna Deweya, amerykańskiego filozofa i pedagoga z pierwszej połowy XX wieku. Zauważył on, że przekazywanie wiedzy w gotowej postaci nie spełnia ważnych warunków dobrego kształcenia. Nie sprzyja bowiem potrzebie stosowania zdobytych wiadomości w nowych sytuacjach, a także w codziennym życiu pozaszkolnym. Kładł też nacisk na konieczność uczenia się w grupach, na wymianę doświadczeń i wiedzy między uczącymi się. Uczenie się pamięciowe, na którym opiera się tradycyjna szkoła, prowadzi do nadmiernej formalizacji wiedzy, która dzieli się na tysiące niepowiązanych ze sobą fragmentów-procedur służących rozwiązaniu prostych zadań. Ich rozproszony charakter utrudnia budowanie z nich nowych strategii i bardziej złożonych procedur do rozwiązywania zadań.

Metody podające nie uwzględniają zróżnicowanych potrzeb uczniów. W ich ramach działamy tak, jakby każdy z nich przychodził do szkoły z taką samą wiedzą, którą na kolejnych lekcjach wystarczy uzupełnić o z góry narzucone informacje. Nie jest to prawidłowe założenie. Aby wyjść z impasu oraz nawarstwiania się nadmiernych trudności ucznia, należy umożliwić mu coraz bardziej samodzielne rozwiązywanie problemów, pokonywanie drobnych indywidualnych trudności napotykanych podczas jego rozwiązywania oraz scalenie rozproszonych procedur w większe i bardziej złożone całości.

## Wybrane rodzaje metod problemowych

W praktyce nauczyciela matematyki możemy mówić o dwóch typach problemów:

1. Zadaniem ucznia jest coś ODKRYĆ, zazwyczaj nową dla niego regułę, prawo, twierdzenie. Droga rozwiązania zadania nie jest dokładnie sprecyzowana. Nie ma gotowego algorytmu podejścia do zagadnienia. Nauczyciel zostawia uczniowi swobodę działania, ale oczekuje pewnego konkretnego rozwiązania. Droga odkrywania w matematyce prowadzi najczęściej od analizy pewnych przypadków, uogólniania faktów matematycznych na podstawie dostrzeganych prawidłowości, do hipotezy. Na hipotezę lub twierdzenie czeka nauczyciel. Kolejnym etapem będzie teoretyczne uzasadnienie, że dokonane

odkrycie rzeczywiście jest rozwiązaniem problemu. W nauczaniu tradycyjnym kładzie się na ten typ problemu mniejszy nacisk niż na kolejny.

2. Zadanie ucznia polega na SKONSTRUOWANIU rozwiązania problemu niejako z gotowych elementów. Uczeń na ogół zdaje sobie sprawę, z jakich metod, technik i narzędzi może skorzystać. Rozwiązując zadanie, uczeń musi uzasadniać, dlaczego ta właśnie procedura prowadzi do celu. Uzasadnienie to przebiega dwoma drogami: droga poprawności stosowania reguł postępowania podczas wykonywania poszczególnych kroków (np. czy rachunki są poprawne), droga poprawności rozwiązania, która polega na sprawdzeniu, czy rozwiązanie spełnia założone na wstępie warunki.

Zadaniem nauczyciela współpracującego z uczniami metodą problemową jest wzbudzenie w podopiecznych motywacyjnego napięcia, zaciekawienia, które dociekliwych uczniów zaangażuje do pracy o charakterze działalności badawczej, m.in.: poszukiwanie brakujących informacji, gromadzenie odpowiednich narzędzi, uświadomienie celu.

Do omawianej grupy metod stosowanych z powodzeniem w nauczaniu matematyki należą:

1. **Klasyczna metoda problemowa**
   Nauczyciel prezentuje problem uczniom mającym odpowiednią wiedzę do jego zrozumienia i rozwiązania. Upewnia się, że zrozumieli oni problem zgodnie z intencją, następnie wspiera kolejne etapy rozwiązania zadania. Obejmują one: gromadzenie pomysłów i przygotowywanie narzędzi, weryfikację tych pomysłów, wdrażanie rozwiązań. Na zakończenie nauczyciel przyjmuje raporty i ocenia rozwiązania problemu. Pomoc uczniom polega także na zaproponowaniu odpowiednich pomocy dydaktycznych, z których uczniowie mogą korzystać podczas pracy nad problemem. Nauczyciel dba o utrzymanie właściwej atmosfery pracy, nie jest jednak osobą, która dostarcza bezpośrednich wskazówek ułatwiających pokonywanie merytorycznych trudności. Do jego zadań należy także pomoc uczniom w utrwaleniu zdobytej wiedzy.

2. **Wykład problemowy**
   Stanowi on całość obejmującą kompletny proces rozwiązania problemu od jego postawienia, po weryfikację rozwiązania. Nauczyciel może zaplanować, co chce przedstawić w założonym przedziale czasowym i jaką rolę w wkładzie mają odgrywać jego słuchacze. Wykład ten nie jest zatem klasycznym monologiem, lecz przyjmuje postać rozmowy z wieloma rozmówcami. To właśnie uaktywnienie uczniów jest celem, to oni powinni czuć się w pewnym zakresie autorami rozwiązania. Wykładowca zatem przedstawia problem, wprowadza go w atrakcyjnej formie, przyciąga uwagę uczniów i skupia ją na celu do osiągnięcia. Upewnia się, że problem został zrozumiany, zadaje pytania kontrolne. Spośród pomysłów na jego rozwiązanie umiejętnie wskazuje te najbardziej optymalne, chociaż może on też prowadzić rozumowanie drogą, na której rozwiązanie nie zostanie znalezione. Jego zadanie polega na sterowaniu procesem myślowym uczniów. W przyszłości uczniowie powinni sami realizować schemat pracy nad problemem przećwiczony pod kierunkiem nauczyciela: prowadzić ze sobą wewnętrzny dialog złożony z pytań i odpowiedzi, stawiać i weryfikować swoje hipotezy, wykrywać

sprzeczności lub błędy w swoim rozumowaniu, a na końcu uzasadniać prawidłowe rozwiązanie. Uczeń czuje się w tej metodzie komfortowo, gdyż wie, że nauczyciel panuje nad procesem rozwiązywania. Nie musi mu zależeć na dojściu do celu w określonym czasie. Bardziej może się skupić na samej metodzie pracy nad problemem oraz na utrwalaniu wiedzy, która wiąże się z zadaniem.

Na wstępie nauczyciel podaje temat wykładu i określa jego cele. Analizuje sytuację problemową, z której wynikają szczegółowe cele do osiągnięcia. Powinny być one sformułowane z podaniem warunków, które ma spełniać rozwiązanie. Następnie nauczyciel upewnia się, że problem został właściwie zrozumiany, pyta o użyteczne pomoce, lecz nie o rozwiązanie zadania. Analiza sposobów podejścia do problemu stanowi środkowy etap wykładu, z którego wyłania się rozwiązanie. Powinno ono pojawić się w momencie, gdy nauczyciel ma przekonanie, że większość uczniów zna rozwiązanie lub jest blisko. Powinien wtedy poprosić jednego z uczniów o podanie rozwiązania. Kolejny etap poświęcony jest analizie poprawności rozwiązania, liczbie rozwiązań oraz konsekwencjom wynikającym z rozwiązania (np. jakie jeszcze zadania można rozwiązać w ten sposób).

3. **Wykład konwersatoryjny**
   Ten typ pracy metodą problemową jest podobny do poprzedniego. Tym razem więcej czasu i miejsca zajmują na zajęciach działania uczestników. Nauczyciel powierza im do rozwiązania pewne problemy cząstkowe, których rozwiązania przybliżają do rozwiązania problemu głównego. Rozmowy o rozwiązaniach tych zadań i ich użyteczności pochłaniają najwięcej czasu. Nauczyciel musi dobrze rozpoznać możliwości i potrzeby współpracujących uczniów, gdyż przydzielając im zajęcia, musi brać pod uwagę tempo pracy poszczególnych uczniów bądź grup.

W każdym z typów wykładów nauczyciel przygotowuje odpowiednie pomoce ułatwiające prezentację problemu. Warto użyć tablic i plansz, pokazów slajdów, eksperymentów, filmów. Od jakości pierwszego etapu – przedstawienia problemu – zależy w dużej mierze jakość rozwiązania.

Do grupy metod problemowych zaliczane są także metody aktywizujące, np.

- studium przypadku,
- metoda sytuacyjna,
- inscenizacja, seminarium,
- dyskusja dydaktyczna
- gry dydaktyczne.

Pierwszej z nich poświęcamy Zeszyt 3 tego zestawu, a z pozostałych, z punktu widzenia celów edukacji matematycznej, na uwagę zasługują dyskusja dydaktyczna oraz gry dydaktyczne. Omówimy je pokrótce.

1. **Dyskusja dydaktyczna**
   Dyskusję definiuje się jako wymianę myśli i poglądów na dany temat. Powinna być uporządkowana w swoim przebiegu oraz podsumowana na zakończenie. Dyskusja jako metoda problemowa wprowadza jeszcze kilka ograniczeń. Tematem dyskusji musi być pewien problem, a uczestnicy powinni konfrontować swoje zdania na temat sposobów jego rozwiązania. Jeżeli problem ma wiele rozwiązań, to warto też rozmawiać na temat tego optymalnego. Kryteria optymalności to także temat do dyskusji. Jej uczestnicy doprecyzowują wspólnie problem do rozwiązania, konfrontują stanowiska, wyciągają wnioski ukierunkowujące dalszy przebieg pracy, eliminują niewłaściwe propozycje, właściwe uzasadniają, dzielą się wiedzą i argumentami. Podejmują wspólne decyzje.
   Na początku zatem nauczyciel wprowadza uczniów do dyskusji, podając jej temat i cele. Przypomina też zasady dyskusji związane z jej sprawnym przebiegiem (np. konieczność zachowania kolejności wypowiadania się, nieprzerywanie innym itp.). Przywołuje też wiedzę niezbędną podczas rozwiązywania problemu, określa ramy czasowe, sposób ich przestrzegania oraz sposób podania wniosków, zaprasza do dyskusji.
   Następnie rozpoczyna się dyskusja. Prowadzący ją (zazwyczaj nauczyciel) udziela głosu jej uczestnikom, porządkuje wypowiedzi, przeformułowuje je, zapisuje na tablicy ważne informacje i propozycje (może to też robić wybrany lub wyznaczony sekretarz), zadaje pytania naprowadzające, prosi o wypowiedź wybrane osoby, prosi o dodatkowe wyjaśnienia, dba o to, by dyskusja zmierzała do wyznaczonego celu, podsumowuje etapy dyskusji.
   Na zakończenie prowadzący podsumowuje wyniki dyskusji, systematyzuje wnioski oraz formułuje rozwiązanie problemu w takiej postaci, żeby wszyscy uczestnicy mogli się z nim zgodzić. Ocenia poziom dyskusji i wyciąga wnioski dotyczące kolejnych dyskusji problemowych. Ocenia udział poszczególnych osób i ich wkład w rozwiązanie problemu. Dziękuje za udział w dyskusji.

2. **Gra dydaktyczna**
   Gra jest aktywizującą metodą problemową w tym znaczeniu, że uczestnik gry (gracz) musi opracować sposób lub strategię uzyskania w grze jak najlepszego wyniku, czyli znaleźć sposób na wygraną. Perspektywa nagrody, jaką jest zwycięstwo w grze, ma aspekt motywujący do podejmowania wysiłku, który powinien być związany z problemem zawartym w samej grze. Gry dydaktyczne mogą mieć charakter problemowy. Oprócz problemów związanych z odkryciem strategii gwarantującej wygraną (nie każda gra ma taką strategię) gracz może też ćwiczyć sprawność w rozwiązywaniu problemów, rywalizując z innym graczem lub grupą, może także rozwiązywać zadanie polegające na odkryciu reguły lub wzoru. Tego typu gry są szczególnie cenne. Oto przykład takiej gry:

   **Opis gry Dojdź jak najbliżej**

   Uczniowie kl. III–IV

   Przygotowujemy karty do gry z liczbami od 1 do 9 (36 kart).

   Liczba graczy: od 2 do 4

Reguły:

1. Każdy gracz otrzymuje 4 karty. Następnie gracze z dwóch kolejnych talii układają liczbę dwucyfrową (każda karta oznacza cyfrę: dziesiątek i jedności).

2. Zadaniem graczy jest ułożenie ze swoich kart-cyfr dwóch liczb dwucyfrowych, których suma lub różnica jest najbliższa wyłożonej liczbie dwucyfrowej.

3. Wygrywa ten z graczy, którego suma lub różnica liczb najmniej różni się od wyłożonej. Przed wyłożeniem kolejnej liczby dwucyfrowej gracze mogą zdecydować, ile spośród swoich kart wymieniają na kolejne losowo wybrane.

Podczas tej gry przed uczniami pojawiają się następujące problemy:

- Czy lepiej jest układać sumę czy różnicę?
- Jak ułożyć karty przed sobą, żeby lepiej zorientować się w sytuacji (obok siebie czy w rzędach)?
- Jak ułożyć karty, żeby wynik był optymalny (czy w wypadku odejmowania wybrać opcję „przekraczam próg dziesiątkowy")?
- Jakie cyfry warto wylosować, żeby ułożyć z nich jak najwięcej różnych sum i różnic (wtedy szanse na dojście jak najbliżej rosną)?
- Ile różnych układów wystarczy zbadać, żeby być pewnym, że nie ma innego do wyboru?

Zapewne są inne. Oprócz nich uczeń ćwiczy pamięciowe rachunki w zakresie do 100.

## Fazy rozwiązywania problemów

Skoro rola nauczyciela podającego wiedzę się zmniejsza, wzrasta rola samego ucznia i grupowych interakcji. Praca w grupie jest możliwa wtedy, gdy problemy są dostatecznie złożone i wymagają podziału pracy i ról.

Dlatego głównym zadaniem nowoczesnej szkoły jest stwarzanie sytuacji problemowych i przestrzeni edukacyjnej odpowiedniej dla ich rozwiązywania.

Przyjrzyjmy się bliżej metodzie problemowej, tym razem od strony uczniów zaangażowanych w rozwiązanie (Mason i in., 2005).

Faza 1. **Odpowiednio zmotywowany uczeń** jest gotów do zapoznania się z problemem. Ma ze sobą zestaw niezbędnych uniwersalnych pomocy: papier, przybory do pisania, podręczniki, tablet…

Faza 2. **Nauczyciel zapoznaje ucznia z problemem.** Uczeń słucha i zapoznaje się z zadaniem, obserwuje zdjęcia, schematy, rysunki przedstawiane przez nauczyciela. Robi notatki. Jeśli zadanie jest bardzo złożone, nauczyciel daje uczniowi lub grupie uczniów problem na piśmie. Tak przedstawiony problem nie wymaga właściwie dodatkowej prezentacji, jednak warto je robić, ponieważ podczas prezentacji można uzupełnić informacje o dodatkowe dane. Nie do przecenienia są także emocjonalne walory zadania, które można przedstawić osobiście.

Faza 3. Nauczyciel przekazuje pracę uczniom lub każdemu z osobna. Można ją nazwać **przygotowaniem do rozwiązania problemu.** Przygotowują się uczniowie. Przygotowanie polega na gruntownej analizie zadania pod kątem narzędzi potrzebnych do jego rozwiązania. Uczeń wiąże treść problemu z już posiadaną wiedzą, określa związane z nią narzędzia, definicje, wzory, twierdzenia. Ten zakres może być dość szeroki. W ramach przygotowania uczeń szuka w pamięci podobnych zadań, które wcześniej umiał rozwiązać. Planuje pracę nad rozwiązaniem, opracowuje też warunki, jakie powinno spełniać rozwiązanie, czyli co jest efektem tego zadania (liczba, figura, geometryczna, opis czegoś, odpowiedź na pytanie teoretyczne). W tej fazie uczeń bazuje na swojej intuicji i w ten sposób wybiera to, co jego zdaniem może się przydać. Jego mózg powoli przejmuje problem, to znaczy polaryzuje się na nim, i rozpoczyna pracę nie tylko na poziomie świadomości, lecz także działa w sposób nieuświadomiony, bezwiednie. Upływ czasu powoli traci dla ucznia znaczenie.

Faza 4. **Uczeń atakuje problem za pomocą zgromadzonych narzędzi.** Jednocześnie weryfikuje swoje wyniki, porównuje z warunkami zadania, analizuje w poszukiwaniu błędów. To ważna faza, w której rozwiązujący wzbudza w sobie podstawową nieufność do stosowanych metod i ich wyników. Jest podejrzliwy i stara się wyszukiwać błędy w rozwiązaniu. To jedna z różnic między fazą 3 i fazą 4. Na tym etapie szczególnie cenne jest popełnianie błędów przez ucznia. W fazie 3 ewentualny zły dobór narzędzi nie może być w żaden sposób zweryfikowany: uczeń dobiera je intuicyjnie, kierując się dostarczonymi informacjami, które mogą być mylące. Natomiast w tej fazie uczeń musi już rozumować analitycznie, krytycznie i dedukcyjnie, a więc opierając się na jasnych i niepodważalnych kryteriach matematycznej poprawności budowania łańcuchów przyczynowo-skutkowych. Dlatego też ważne jest, żeby narzędzia krytycznego rozumowania były na tyle efektywne, by ich stosowanie prowadziło do wykrywania błędów. Będzie wiązała się z tym kolejna faza.

Faza 5. **Utknięcie.** Wykrycie pomyłki lub natrafienie na istotne ograniczenie czy brak uniemożliwiający rozwiązanie zadania to sytuacja dość powszechnie występująca podczas samodzielnego uczenia się i określana jest często jako „bycie w kropce”. Zagadnieniem wychodzenia z blokad powstających podczas rozwiązywania zadań, pokonywania ograniczeń zajmuje się osobna teoria TOC (Theory of Constrains). Uczeń nie musi znać jej założeń ani twierdzeń. Wystarczy, że pozna kilka technik identyfikacji trudności i przepracowywania ich oraz zastosuje cykliczną procedurę służącą „wyjściu z kropki”:

- nie zrazi się niepowodzeniem, które go spotkało,
- podda analizie drogę dojścia do swojej „kropki”,
- spróbuje zmienić coś na tej drodze albo zastąpi ją inną drogą,

- zastosuje zmodyfikowaną procedurę,
- zweryfikuje, podda ewaluacji zastosowaną zmodyfikowaną procedurę.

Zwróćmy uwagą, że w tej fazie uczeń pracuje nie tyle nad samym problemem, lecz nad własnym ograniczeniem, przeszkodą, brakiem wiedzy niezbędnej do pokonania zasadniczych trudności problemu. Jeżeli dostępny zestaw narzędzi nie jest dostatecznie bogaty, aby posłużyć rozwiązaniu, pojawia się konieczność znalezienia innych narzędzi. Trzeba sięgnąć do podręczników i zasobów internetowych.

Zdarza się także, że nadmiernie skoncentrowani nad zadaniem uczniowie nie dostrzegą prostego wyjścia z sytuacji, nie wpadną na prosty pomysł. Warto w takich sytuacjach doradzić im krótkie rozproszenie się, oderwanie od zadania, relaks, spojrzenie w okno lub pomyślenie o czymś przyjemnym. Pamiętajmy o tym, że nasz umysł także wtedy rozwiązuje problem i że moment rozproszenia uwagi stwarza okazję, aby efekty jego nieświadomej pracy wypłynęły na powierzchnię świadomości ucznia w postaci pomysłu przełamującego impas.

Jeśli opisywana procedura dotycząca identyfikacji trudności i jej pokonania nie przynosi rozstrzygnięcia, należy ją powtarzać do skutku albo odłożyć rozwiązanie problemu na inny termin i zajęcie się analogicznym, prostszym (nauczyciel powinien być przygotowany na takie sytuacje). Można też rozważyć ingerencję nauczyciela, który zasugeruje kilka nowych pomysłów do weryfikacji, z czego jeden okaże się skuteczny.

Faza ta, jak widzimy, przechodzi w fazę 4. Każdą nową metodę pokonania trudności uczeń przepracowuje w formie ataku na zadanie. Jednocześnie sprawdza zasób przygotowanych w fazie 2 narzędzi i modyfikuje go w zależności od kolejnych pomysłów. Podział ten jest zatem czysto umowny. Stosujemy go jednak ze względu na łatwość opisu złożonych procesów umysłowych. Cechą charakterystyczną tego etapu jest zdarzenie EUREKA!, sytuacja, w której zaatakowany problem ustępuje czy też poddaje się i jawi się uczniowi jako rozwiązany. Trudno przecenić znaczenie tego momentu. Poczucie satysfakcji z włożonego wysiłku bierze się z wnętrza ucznia, nagroda jest wręczana i i odbierana przez tę samą osobę. Motywacja do podejmowania się kolejnych zadań problemowych wzrasta.

Faza 6. **Atakowany problem został rozwiązany.** Uczeń opracowuje rozwiązanie zgodnie z narzuconym lub samodzielnie wypracowanym schematem. Powstaje pisemny raport, który może być zaprezentowany publicznie. Zawiera opis drogi jego rozwiązania. Pomija momenty wahań, błędy lub falsyfikacje hipotez, ale może uwypuklać momenty przełomowe. Warto o nich wspomnieć podczas prezentacji. Ważne jest, że uczeń zdaje sobie sprawę, że:

- aby znaleźć i zapamiętać rozwiązanie trudnego problemu, trzeba i warto popełniać błędy,
- negatywne emocje muszą wystąpić po to, by tym większe były te pozytywne,
- warto sprawdzać swoją intuicję, być podejrzliwym wobec wszelkich oczywistości pojawiających się w rozwiązaniu.

Dzięki temu angażujemy w nie więcej ośrodków mózgu, nasza wiedza staje podczas takich ćwiczeń coraz bardziej operacyjna, użyteczna. Uczymy się też uniwersalnej metody pokonywania trudności podczas rozwiązywania problemów, a więc też uniwersalnej metody uczenia się.

Faza 7. **Refleksja nad zadaniem.** Emocje są wygaszone i uczeń spogląda wstecz na drogę, którą przeszedł. Dostrzega pewne stałe elementy tej drogi, wyodrębnia etapy i jednocześnie sprawdza, czy uwzględnił wszystkie konieczne elementy. Zastanawia się, z jakimi innymi znanymi lub nowymi zagadnieniami wiąże się problem. Nauczyciel/coach może w tym pomóc, on przecież wie, do jakich jeszcze działów lub konkretnych problemów odesłać ucznia w następnej kolejności.

# Przykłady zadań problemowych dla uczniów klas IV–VIII

## Zadania dla uczniów klasy IV

**Sytuacja edukacyjna**

**Cele**
- zdobywanie sprawności w obliczeniach zegarowych.

**Forma pracy:** praca w grupach

**Potrzebne materiały:** atrapy tarcz zegarowych (po 3 na grupę), teksty zadań.

**Przebieg zajęć**

**Faza 1.** Uczniowie zostali podzieleni na grupy, mają przed sobą indywidualne zestawy przyborów oraz pomocy dydaktycznych i są gotowi na przyjęcie zadania.

**Faza 2.** Nauczyciel/coach przedstawia następującą historyjkę (zadanie warto zilustrować schematycznie).

> Zbyszek wracał ze szkoły do domu. W drodze zauważył, że jego zegarek zatrzymał się na godzinie 13:58.
> – Która może być teraz godzina? – zastanawiał się chłopak. – Muszę kogoś spytać.
> – Na moim zegarku jest 14:05, ale ten zegarek się trochę spóźnia – powiedziała napotkana pani.
> – Na moim jest 14:25 – powiedział znajomy tej pani, z którym szła – ale mój zegarek trochę się spieszy.
> – Znam te zegarki – powiedział mijający ich zegarmistrz. – Wczoraj o tej porze je ustawiałem: jeden spóźnia się tyle samo minut na dobę, co drugi spieszy. Nic się nie dało zrobić. Nadal tak działają.

Pytania problemowe:

- O której godzinie toczyła się ta rozmowa?
- Ile minut wcześniej zegarek Zbyszka przestał działać?

**Faza 3.** Dzieci ustawiają godziny na atrapach. Prowadzą rozmowy o tym, co znaczą informacje podane w zadaniu. Ustalają, co im się może przydać. Dzielą się rolami.

**Faza 4.** Jeden z uczniów może powiedzieć: „Na pewno jest to godzina późniejsza niż 13:58”. A drugi: „…a nawet późniejsza niż 14:05”. Może wywiąże się dialog. Może ktoś uzasadni, dlaczego musi to być godzina wcześniejsza niż 14:25.

**Faza 5.** Uczniowie wpadają na pomysł, żeby zgadywać, np. ktoś zaproponuje: „Niech to będzie godzina 14:10”. Uczniowie ustawiają jeden z zegarów, sprawdzają. Zegarek pani spieszyłby się 5 minut, a pana spóźniał 15 minut. To nie jest dobry pomysł. Dzieci próbują nowych. Być może za którymś razem opracują strategię pozwalającą na szybsze odgadnięcie wyniku. Każdy błąd może dawać im zniechęcające poczucie utknięcia, z którym trzeba sobie poradzić. W końcu zgadują i sprawdzają właściwą odpowiedź: 14:15.

**Faza 6.** Uczniowie upewniają się, że wynik jest prawidłowy. Przedstawiają rozwiązanie na kartce. Rysują na niej wskazówki zegara ułożone na godzinie 14:15 i zaznaczają na brzegu tarczy łuki odpowiadające 10 minutom „do przodu” i 10 minutom „do tyłu”.

**Faza 7.** Nauczyciel odbiera raporty dotyczące rozwiązanego zadania i pyta: „Jak znaleźlibyśmy odpowiedź do zadania, gdyby różnica między wskazaniami zegara pani i pana była większa niż 20 minut? Jak szybko znaleźć odpowiedź dla różnicy równej 45 minut? Czy rozwiązanie zadania byłoby inne, gdyby Zbyszek nie miał zegarka ani telefonu komórkowego przy sobie? Zakładamy, że spotkałby nadal te same osoby”.

Indywidualnie dzieci mogą teraz zająć się problemem utrwalającym umiejętności zdobyte podczas zajęć grupowych.

> Zbyszek wracał ze szkoły do domu. W drodze zauważył, że jego zegarek zatrzymał się na godzinie 16:27.
> – Która może być teraz godzina? – zastanawiał się chłopak. – Muszę kogoś spytać.
> – Na moim zegarku jest 16:47, ale ten zegarek się trochę spóźnia – powiedziała napotkana pani.
> – A ja nie mogę odczytać ze swojego, bo nie wziąłem okularów – powiedział znajomy tej pani, z którym szła – ale mój zegarek trochę się spieszy.
> – Znam te zegarki – powiedział mijający ich zegarmistrz. – Wczoraj o tej porze je ustawiałem: jeden spóźnia się 5 minut na dobę, a drugi spieszy 8 minut. Nic się nie dało zrobić. Nadal tak działają.

Pytania problemowe:

- O której godzinie toczyła się ta rozmowa?
- Którą godzinę wskazywał w jej trakcie zegarek pana?

## Zadania dla uczniów klasy IV–V

**Sytuacja edukacyjna 1**

**Cele**

kształcenie umiejętności obliczeń pieniężnych.

**Potrzebne materiały:** atrapy monet i banknotów, kalkulatory, karty pracy z miejscami na odpowiedzi.

**Przebieg zajęć**

**Faza 1.** Uczniowie zostali podzieleni na grupy, mają przed sobą indywidualne zestawy banknotów oraz monet i są gotowi na przyjęcie zadania.

**Faza 2.** Nauczyciel opowiada:

> Kasjer ma w kasie banknoty dziesięciozłotowe, dwudziestozłotowe i pięćdziesięciozłotowe oraz monety o nominałach od 5 gr do 5 zł. Chce wypłacać kwoty, używając jak najmniejszej liczby banknotów i jak najmniejszej liczby monet. W pierwszej kolumnie zapisane są kwoty, jakie ma wypłacić kasjer. Pomóż kasjerowi, wpisz w wierszach odpowiednią liczbę banknotów lub monet o danym nominale. Jak upewnić się, czy rzeczywiście użyliśmy najmniejszej z możliwych liczby banknotów i monet?

| Kwota | Nominały | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zł | 50 zł | 20 zł | 10 zł | 5 zł | 2 zł | 1 zł | 50 gr | 20 gr | 10 gr | 5 gr |
| 34,55 | | | | | | | | | | |
| 125,30 | | | | | | | | | | |
| 243,05 | | | | | | | | | | |
| 243,05 | | | | | | | | | | |
| 356,20 | | | | | | | | | | |
| 408,90 | | | | | | | | | | |
| 599,35 | | | | | | | | | | |
| | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |

W tabeli podano liczby wypłaconych banknotów i monet o danym nominale. Tym razem kasjer nie zawsze zwracał uwagę na to, żeby wypłacać jak najmniejszą liczbę banknotów i monet. Oblicz wypłacone kwoty i sprawdź, w których wypłatach mógł użyć mniejszej liczby banknotów oraz monet, popraw wpisy w tabeli.

| Kwota | Nominały | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zł | 50 zł | 20 zł | 10 zł | 5 zł | 2 zł | 1 zł | 50 gr | 20 gr | 10 gr | 5 gr |
| | 4 | 3 | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 2 | 5 | 6 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| | 1 | 5 | 2 | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 100 | 2 | 4 |
| | 3 | 3 | 2 | 2 | 5 | 5 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| | 4 | 3 | 6 | 7 | 8 | 10 | 9 | 2 | 2 | 2 |
| | 0 | 10 | 5 | 4 | 4 | 7 | 0 | 0 | 3 | 3 |
| | 3 | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 | 5 | 5 | 1 | 0 |

**Faza 3.** Uczeń przygotowuje się do rozwiązania zadania. W tym wypadku nie wymaga ono zbyt wielu przygotowań. Grupa może się skoncentrować na podziale pracy. Można podzielić się pracą nad jedną tabelą, potem nad drugą. Nauczyciel może zasugerować, że nad kolejnymi wypłatami warto pracować w parach. Dba też o to, by uczniowie nie skupiali się wyłącznie na rachunkach.

**Faza 4.** Problemem w zadaniu jest opracowanie sposobu na jak najbardziej efektywne wypłacanie, czyli poszukiwany jest prosty algorytm, w którym na wejściu jest pewna kwota, na wyjściu zaś ciąg liczb. Uczniowie powinni dostrzegać następujące prawidłowości: przy danych nominałach liczba w kolumnie 50 zł może być dowolna, ale w kolejnej nie może przekraczać 2, w kolejnej 1 itd. Żeby dobrze wypłacać pieniądze, iloczyn liczby banknotów lub monet ich nominału nie może być wyższy niż nominał w rubryce z lewej strony. Oczywiście nie żądamy od uczniów zredagowania tej zasady, tylko jej stosowania.

**Faza 5.** Potknięcia lub utknięcia będą związane z błędami rachunkowymi, a te będą wynikać z niewykształconej zasady lub nieuważnego stosowania zasad uproszczonych. Eureką jest poczucie, że wyliczanie następuje strawniej.

**Faza 6.** Tabelki są gotowe. Składane są raporty i można przystąpić do refleksji.

**Faza 7.** Nauczyciel: „Jak rozwiązalibyście takie zadanie: Kasia ma w skarbonce wyłącznie monety dwuzłotowe. Ile ma tych monet, jeśli uzbierała 346 zł? Iloma banknotami i monetami można wypłacić tę kwotę, używając najmniej monet i banknotów”. Nauczyciel proponuje inne kwoty. Tworzy kolejne zadanie. Uczniowie pomagają, można zmieniać zawartość skarbonki: jedna pięciozłotówka i reszta dwuzłotówki, a kwota to 99 zł. Jako zadanie do indywidualnego rozwiązania (np. w domu): Uzupełnij tabelkę i popraw w miejscach, w których liczba monet lub banknotów mogłaby być mniejsza.

| Kwota | Nominały | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zł | 50 zł | 20 zł | 10 zł | 5 zł | 2 zł | 1 zł | 50 gr | 20 gr | 10 gr | 5 gr |
| 134,90 | | | | | | | | | | |
| 775,40 | | | | | | | | | | |
| 649,70 | | | | | | | | | | |
| 356,20 | | | | | | | | | | |
| | 4 | 3 | 2 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 0 | 3 |
| | 2 | 2 | 5 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 5 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 |

**Sytuacja edukacyjna 2**

**Cele**

kształcenie umiejętności obliczeń pamięciowych oraz opracowywania strategii.

**Potrzebne materiały:** 9 kart do gry z liczbami od asa do 9 na każdą grupę.

**Przebieg zajęć**

**Faza 1.** Uczniowie zostali podzieleni na grupy, mają przed sobą indywidualne zestawy kart, przybory do pisania i są gotowi na przyjęcie zadania.

**Faza 2.** Nauczyciel mówi: „Kwadrat magiczny to figura złożona z liczb, w której suma liczb w każdej kolumnie, w każdym wierszu i na ukos jest taka sama. Dostaliście po 9 kart, które trzeba ułożyć w prostokąt 3 x 3 tak, żeby tworzyły one kwadrat magiczny. Ułożenie kwadratu magicznego z podanych liczb to pierwszy etap zadania. Drugi etap polega na ułożeniu kwadratu magicznego z innych dziewięciu kolejnych liczb”.

**Faza 3.** Uczniowie przygotowują zestaw, układają go w dowolny kwadrat, np. po kolei.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Sprawdzają, czy sumy liczb są równe. Okaże się, że nie są.

**Faza 4.** Aby atak się udał, uczniowie muszą przedyskutować ze sobą metodę pracy. Mają tylko jeden zestaw kart na grupę. Trzeba je przekładać w pewien sposób, żeby nie powtarzać układów już odrzuconych. Wszystkich możliwych ustawień jest dużo. Potrzebne są zasady eliminowania. Celem ataku jest wypracowanie zasad eliminowania, dzięki którym wykluczone zostaną „ekstremalne" wiersze, kolumny lub ukosy, jak powyższy 1+2+3 to dużo mniej niż 7+8+9. Trzeba te liczby wymieszać. Najlepiej niech żadne dwie z tych trójek nie stoją w tej samej kolumnie, wierszu lub ukosie.

**Faza 5.** Zadanie się nieco upraszcza, ale nadal dominującym odczuciem dla uczniów będzie utknięcie. Potrzebna jest cierpliwość i współpraca, np. ktoś układa, ktoś inny liczy. Uczniowie mogą też wpaść na pomysł wyprodukowania kolejnych zestawów kart. Z czasem zobaczymy rezultat.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

Uczniowie mogą też wpaść na pomysł wyprodukowania kolejnych zestawów kart. Z czasem zobaczymy rezultat.

**Faza 6.** Uczniowie przygotowują raport. W raporcie prosimy ich o opis własności liczb w tabeli, np. jaka jest suma liczb w kolumnach i wierszach, rozkład liczb parzystych i nieparzystych. Dlaczego liczba 5 leży w środku? Jeśli można tabelą obracać lub odbijać ją symetrycznie, to ile takich kwadratów można utworzyć?

**Faza 7.** Prosimy o rozwiązanie analogicznego zadania z kolejnymi liczbami od 34 do 42. Jaka powinna być liczba w środku? Jaka będzie suma charakteryzująca ten kwadrat? A co się stanie, jeśli liczby będą się różniły o 2, np. weźmiemy do kwadratu magicznego 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18? Jak można sobie pomóc, układając ten kwadrat? Jak można skorzystać z kwadratów układanych wcześniej?

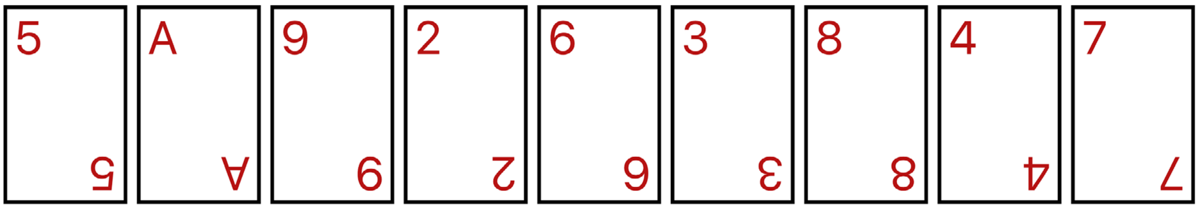
## Zadania dla uczniów klasy IV–VIII

**Magiczna talia**

**Cele**

kształcenie umiejętności rozumowania i odwracania operacji oraz opracowywania strategii.

**Potrzebne materiały:** 9 kart do gry z liczbami od asa do 9 na każdą grupę. Zestaw takich kart dla siebie, ułożonych w kolejności:

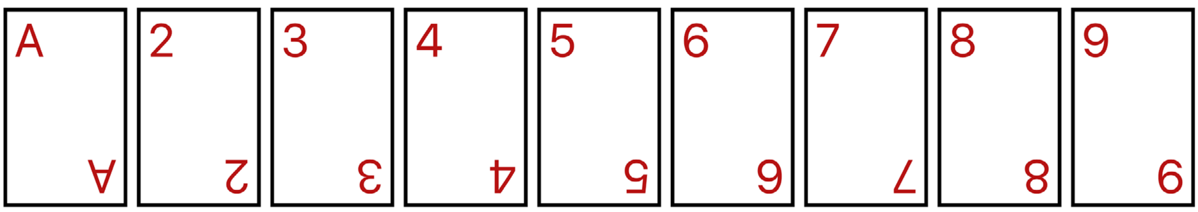



**Przebieg zajęć**

**Faza 1.** Uczniowie będą pracowali indywidualnie, mają przed sobą po jednym zestawie kart, przybory do pisania i uczestniczą w prezentacji problemu.

**Faza 2.** Nauczyciel składa swoje karty w talię liczbami do dołu, a następnie przekłada kartę z wierzchu na spód talii. Potem kolejną z wierzchu układa na stole. Będzie to as (jedynka), kolejną kartę przekłada na spód talii i kolejną wykłada przed uczniami. Zobaczą dwójkę. Powtarza te czynności w tej samej kolejności aż do wyłożenia ostatniej karty – dziewiątki.

Pyta: „Co ciekawego można powiedzieć o układzie tych kart?”.



„Waszym zadaniem jest przygotowanie swojej talii w taki sposób, aby po wyłożeniu kart tak, jak ja to robiłem, uzyskać to, co ja”.

**Faza 3.** Uczniowie przygotowują układ kart. Przekładają pierwsze kolejne do ułożenia karty od asa do czwórki pozostałymi kartami. Wykładają je na stół. Okazuje się, że po piątce (lub wcześniej) nie wykłada się kolejna oczekiwana karta. Trzeba zaczynać od początku.

**Faza 4.** Atak polega na tym samym, co końcówka opisana w poprzedni punkcie. Dzieci zapisują, modyfikują i testują kolejne układy. W niektórych rodzi się poczucie, że nie da się rozwiązać zadania tą drogą.

**Faza 5.** Poczucie utknięcia wzmacnia nauczyciel, który mówi: „Ojej, zapomniałem wam dodać jeszcze jedną kartę, przecież przygotowałem ich 10”. Jeśli ktoś był bliski sukcesu, a nawet zdążył już rozwiązać zadanie, z powodu „pomyłki” nauczyciela, musi zacząć od początku. Metoda, którą obrał, nie jest dobra, skoro nie da się jej uogólnić. Poza tym nie wiadomo, czy nauczyciel nie ma w rękawie jeszcze karty z waletem, damą i królem. Kolejne minuty pozwalamy uczniom tkwić „w kropce”. Jeśli nie wpadną oni na twórcze rozwiązanie zadania, podsuwamy im następujący pomysł:

„Ułóżcie karty na stole po kolej, czyli tak, jakby zadanie już było rozwiązane[1]. Następnie wykonajcie wszystkie czynności w odwrotnej kolejności, niż trzeba byłoby zrobić, żeby uzyskać taki układ. Przykładowo, jeżeli trzeba było ułożyć kartę z wierzchu na spód, to teraz będziecie pobierać kartę ze spodu i kłaść na wierzch”.

Dzieci próbują odtworzyć sytuację, jakby przewijały taśmę filmową do tyłu. Sprawdzają swoje układy. Powtarzają, jeśli trzeba. Wreszcie: Eureka!

**Faza 6.** Uczniowie zapisują rozwiązania dla 10 kart, 9 i dowolnie wybranej innej ich liczby.

**Faza 7.** Nauczyciel podkreśla fakt, że w wielu zadaniach matematycznych trzeba działać dwukierunkowo. Przykładowo, dodawanie sprawdza się odejmowaniem. A działaniem odwrotnym do mnożenia jest dzielenie (i odwrotnie). Uczniowie mogą podać inne przykłady działań i sytuacji, w których stosuje się metodę wykorzystaną do rozwiązania problemu z kartami.

## Zadania dla uczniów klasy IV–V

**Palindromy**
(oprac. na podstawie Pisarski, 2004)

[1] Ten tok myślenia jest bardzo ważny w zadaniach konstrukcyjnych i na dowodzenie, ale także w innych, w których cel musi spełniać określone warunki.

**Cele**

- kształcenie umiejętności obliczeń pamięciowych, pisemnych lub na kalkulatorze.

**Potrzebne materiały:** dywaniki liczbowe do 100 oraz kredki.

**Przebieg zajęć**

**Faza 1.** Uczniowie zostali podzieleni na pary, mają przed sobą indywidualne zestawy: dywaniki i kredki.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Faza 2.** Nauczyciel: „Oto dywanik liczbowy. Wśród tych liczb widzimy te, o których można powiedzieć, że czyta się je tak samo od prawej do lewej i od lewej do prawej, na przykład

22. Albo 9. Ale 21 już nie ma tej własności. Takie liczby jak 22 czy 9 będziemy nazywać palindromami. To słowo oznacza zdanie lub wyraz, które czyta się tak samo od lewej i od prawej strony. Czy znacie takie słowa lub zdania?”. Być może dzieci znają lub wymyślą wyraz: Ala, kajak, potop, albo zdania: Kobyła ma mały bok. Może jutro ta dama sama da tortu jeżom. Jeśli nie znają, proponujemy im nasze i prosimy o zapisanie i sprawdzenie.

Nauczyciel: „Zwróćcie uwagę, że jeżeli do liczby 21, która nie jest palindromem, dodamy 12 (odwrócenie cyfr 21), to otrzymamy liczbę 33, czyli palindrom. Liczby takie jak 21 będziemy nazywali palindromami pierwszego stopnia, bo trzeba wykonać jedno dodawanie, żeby z liczby otrzymać palindrom. Poszukajcie innego palindromu pierwszego stopnia na naszym chodniczku”.

Nauczyciel: „Jeżeli operację z dodawaniem liczby o przestawionych cyfrach trzeba powtórzyć dwa razy, otrzymamy palindrom drugiego stopnia. Znajdźcie palindrom drugiego stopnia”. Dzieci mogą wskazać 49 i uzasadnić: 49 + 94 = 143 (nie jest to palindrom), 143 +341 = 484 (palindrom).

Nauczyciel pokazuje sposób kolorowania pół dywanika w zależności od stopnia palindromu.

| | |
|---|---|
| Palindrom | |
| Palindrom 1 stopnia | |
| Palindrom 2 stopnia | |
| Palindrom 3 stopnia | |
| Palindrom 4 stopnia | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

**Faza 3.** Ta faza nie jest zbyt pracochłonna. Wiadomości i umiejętności potrzebne do stawienia czoła problemom są w zasięgu ręki. Problemy są w tym zadaniu natury ilościowej. Trzeba zakończyć pracę w niezbyt długim czasie, a zatem należy ją dobrze rozplanować. Znaleźć skrócone ścieżki. Zastanowić się, w jakiej kolejności i które liczby badać. Można zawczasu zauważyć pewne prawidłowości w rozkładzie liczb w tabeli i nie badać liczb, których stopień palindromiczności widać bez rachunków.

**Faza 4.** Atak nie może się nie udać, jeżeli trudności techniczne się nie spiętrzą. Trzeba połączyć samo dodawanie liczb z przeliczaniem liczby. Należy wykonywać rachunki i zamalowywać pola dywanika w określony sposób. Nie jest łatwo rozpoznać wyższe niż drugi stopień palindromu, jeśli się ich nie przeliczy. Uczniowie mogą porównywać dywaniki i weryfikować różnice.

**Faza 5.** Utknięciem w tym punkcie może być liczba 89. W jej przypadku rachunki trwają znacznie dłużej. Nie jest to jednak utknięcie spowodowane błędem, choć takie też mogą się zdarzyć. Liczba ta wyraźnie różni się od innych.

**Faza 6.** Rozwiązaniem problemu jest kolorowa tablica z palindromami różnych stopni. Łatwo zweryfikować poprawność, ale naszym celem głównym jest nie tyle prawidłowe opisanie każdej z liczb, ile odkrycie odpowiednich symetrii i zbadanie, czy wszystkie uzyskane dywaniki są jednakowe. W wypadku różnic należy się upewnić, że najczęściej występujący stopień palindromu jest poprawny. To ćwiczenie ma rozbudowaną fazę ewaluacji. Warto przy tej okazji porozmawiać o najbardziej efektywnej metodzie gromadzenia danych i ich przetwarzania.

**Faza 7.** Faza ta wynika z poprzedniej. Zachęcamy uczniów do szukania palindromów określonych stopni. Może komuś uda się trafić na kolejny rzadki palindrom, np. stopnia 10 wśród liczb większych od 100, lub znaleźć sposób na konstruowanie liczby będącej palindromem zadanego stopnia.

## Zadanie dla uczniów klas V–VIII

**Patyczkowa algebra** (*Matematyka 1…*, 2015)

- prowadzenie rozumowania przez analogię i indukcyjnego,
- wyciąganie wniosków na podstawie wcześniejszych przypadków,
- uogólnianie własności figur i wyrażanie tych własności w języku algebry.

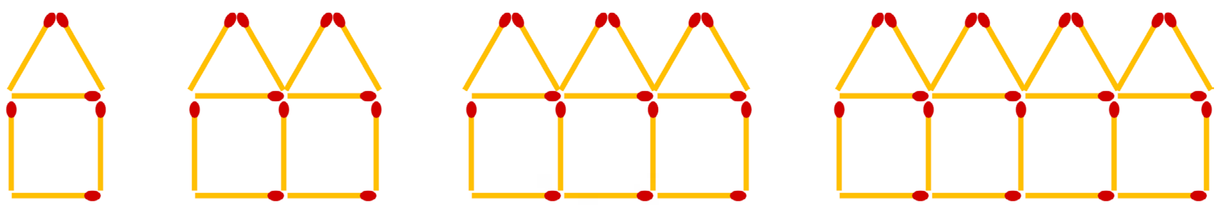
Zadanie jest paradygmatycznym przykładem zadań, które można dostosowywać do poziomu intelektualnego dzieci w różnym wieku oraz odpowiednio dobierać do niego formę pracy (w grupach, praca indywidualna). W klasach młodszych można je ograniczyć do szukania liczby zapałek w kolejnych figurach, w starszych nawet wzoru na sumę liczby zapałek w figurze o dowolnym numerze.

**Potrzebne materiały:** patyczki, liczmany albo zapałki bez łatwopalnych końcówek, tabelki do wpisywania wyników badań i wniosków.

**Przebieg zajęć**

**Faza 1.** Uczniowie zostali podzieleni na pary, mają przed sobą indywidualne zestawy zapałek i tabelki.

**Faza 2.** Nauczyciel: „Mamy cztery domki z zapałek, które wyglądają tak:



Waszym zadaniem jest obliczyć, ile zapałek potrzeba na zbudowanie dwudziestego i pięćdziesiątego takiego domku. Policzcie także, ile zapałek potrzeba razem na zbudowanie 50 takich domków".

**Faza 3.** Uczniowie oglądają swoje figury i tabelki, w których będą notować zbierane informacje.

| Nr figury | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 20 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Liczba zapałek | | | | | | | | | |

Przeliczają patyczki na rysunku i wpisują liczby do tabeli. Układają kolejne figury (5, 6, 7), ewentualnie przeliczają je na rysunku lub w wyobraźni, jeśli dostrzegą prawidłowość: liczba zapałek wzrasta o 5.

**Faza 4.** Ta faza dotyczy zagadnienia związanego z pięćdziesiątym domkiem. Liczby patyczków nie warto uzyskać na drodze przeliczania. To dość duża liczba i przeliczając (nawet piątkami), łatwo się pomylić.

**Faza 5.** Liczby w drugim wierszu mają także pewną ciekawą własność i trzeba ją zauważyć po wypełnieniu tabeli do domku nr 7 lub 20. Można ułatwić młodszym dzieciom odkrycie tej prawidłowości, dodając do tabeli kolejny wiersz. Tu można utknąć po raz pierwszy.

| Nr figury | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 20 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Liczba zapałek | | | | | | | | | |
| Liczba zapałek | 1+ | 1+ | 1+ | 1+ | 1+ | 1+ | 1+ | 1+ | 1+ |

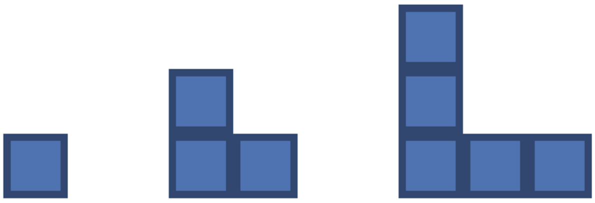
Drugie utknięcie może pojawić się podczas obliczania sumy liczb z drugiego wiersza. Zadanie ma charakter algebraiczny i adresujemy je do uczniów klasy VII lub VIII, wcześniej wyprowadzając z nimi prosty wzór na sumę kolejnych liczb naturalnych, po który będą mogli sięgnąć w fazie 2 lub 4.

**Faza 6.** Ocenę poprawności rozwiązań ułatwiają wypełnione tabele. Warto zapytać o wyniki dla kolejnych przypadków: setny domek, suma stu domków oraz zwrócić uwagę na znaczenie przedstawień obrazowych podczas rozumowania typowego dla arytmetyki lub algebry.

**Faza 7.** Uczniowie wymyślają swoje zadania z zapałek. Mogą je notować w analogicznych tabelkach.

| Nr figury | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 20 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Liczba zapałek | | | | | | | | | |
| Rysunek | | | | | | | | | |

Nauczyciel: „W tym zadaniu używaliśmy zapałek. Możemy do naszych konstrukcji używać kwadratów i obliczać, ile takich figur tworzy kolejne. Układajmy zatem figury według zasady przedstawionej na rysunku”.



## Zadanie dla uczniów klasy VI–VIII

**Gra w patyczki**

**Cele**

- opracowywanie ogólnych strategii prostych gier.

**Potrzebne materiały:** po 12 patyczków (albo kamyczków, kasztanów lub innych drobnych przedmiotów) na parę uczniów.

**Faza 1.** Uczniowie mają do dyspozycji oprócz zestawów tylko kartki i długopisy.

**Faza 2.** Nauczyciel: „Nauczę was dzisiaj prostej gry, w którą warto grać nie tylko na lekcji matematyki. Waszym zadaniem będzie opracowanie strategii, żeby jeden z graczy, ten, który zaczyna, albo drugi mógł za każdym razem wygrywać. Nie będzie to sprawiedliwa gra.

Polega ona na tym, że gracze biorą na zmianę ze stołu albo jeden drobny przedmiot, albo dwa, albo trzy. Wygrywa ten z nich, kto zbierze ze stołu w swoim ruchu ostatni przedmiot”.

**Faza 3.** W ramach przygotowania do ataku na zadanie uczniowie rozgrywają kilka partii gry. Bacznie obserwują ruchy swoje i przeciwnika. Szukają prawidłowości rozkładów wygranej albo zwycięskiej strategii.

**Faza 4.** Uczniowie stawiają hipotezy i wypróbowują je. Gra nie trwa długo, więc nietrudno przetestować w krótkim czasie wiele różnych pomysłów. Mogą one być zapisywane w tabelkach typu „jeśli ja wziąłem 1, to przeciwnik, wziął...”

| Ja wziąłem | 2 | 1 | 2 | 3 | Wygrałem |
|---|---|---|---|---|---|
| Kolega wziął | 2 | 1 | 1 | | |
| Ja wziąłem | | | | | |
| Kolega wziął | | | | | |

Analiza danych, wyszukiwanie prawidłowości, opracowywanie strategii i testowanie ich to praca, która trwa aż do zwycięstwa w zadaniu albo do poczucia „jestem w kropce".

**Faza 5.** Strategia, o którą chodzi w problemach tego typu, opiera się na sumowaniu przedmiotów w sąsiednich dwóch ruchach dwóch graczy. W tej grze ważne jest, żeby drugi gracz brał tyle przedmiotów, ile brakuje do 4. Wtedy w przedostatnim ruchu zostaną 4 przedmioty i drugi gracz, postępując tak samo, zawsze wygra. Można dać następującą wskazówkę: „Analizujcie grę od ostatnich dwóch zbiórek".

Nawet jeżeli nie wszyscy uczniowie wpadną na właściwą strategię, każdy będzie mógł ją wypróbować na podobnych grach z innymi warunkami początkowymi. Przykładowo, mamy 17 kamieni i wolno wziąć 1, 2, 3 albo 4 w jednym ruchu.

**Faza 6.** To faza testowania różnych gier i obmyślania strategii.

**Faza 7.** Uczniowie zbierają informacje i utrwalają je.

| Ile jest patyczków; ile można brać? | Który gracz zaczyna? | Ile bierze zaczynający? | Ile bierze drugi gracz? | Kto wygrywa? |
|---|---|---|---|---|
| 12; 1, 2, 3 | 1 | Dowolną liczbę | Tyle, ile brakuje do 4. | 2 |
| | | | | |
| | | | | |

## Zadanie dla uczniów klas VII–VIII

Wśród problemowych zadań geometrycznych osobną kategorię stanowią zadania na odkrywanie wzorów. Mogą to być zarówno wzory na pola figur, jak i wzory na liczby charakterystycznych odcinków lub miary kątów. Niżej przedstawiamy opis typowej sytuacji edukacyjnej związanej z mniej eksponowanym wzorem dotyczącym liczby krawędzi ścian i wierzchołków wielościanów wypukłych.

## Wzór Eulera dla wielościanów

### Cele

- odkrywanie wzoru łączącego liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian graniastosłupów,
- uogólnienie go na ostrosłupy.

**Potrzebne materiały:** modele graniastosłupów i ostrosłupów dla kilku grup 4–5-osobowych oraz tabelki.

| Graniastosłup o podstawie... | Liczba wierzchołków W | Liczba ścian S | Liczba krawędzi K | W + S | Wzór |
|---|---|---|---|---|---|
| trójkątnej | | | | | |
| czworokątnej | | | | | |
| pięciokątnej | | | | | |
| sześciokątnej | | | | | |
| siedmiokątnej | | | | | |

**Faza 1.** Uczniowie przygotowują podręczniki i kartki do notatek.

**Faza 2.** Nauczyciel: „Dużo już wiemy o tych wielościanach. Dzisiaj odkryjecie jeszcze jedną ich własność, znaną od co najmniej XVIII wieku. Będziecie mogli poczuć te same emocje, jakie czuł wielki matematyk Leonard Euler, któremu przypisuje się odkrycie i dowód tej własności. Myślę, że to przyjemne uczucie.

Na początku zgromadźcie dane o graniastosłupach i wpisujcie je do tabeli. Zadanie będzie polegało na odkryciu prostego związku między liczbami W, K i S”.

**Faza 3.** Uczniowie przypominają sobie, czego nauczyli się o graniastosłupach, czyli: czym są ściany, jak są ułożone, czym są krawędzie. Jak liczba wierzchołków zależy od liczby krawędzi itp. Liczą wierzchołki, krawędzie i ściany na otrzymanych modelach. Wpisują odpowiednie liczby dla graniastosłupów, których modeli nie mają do dyspozycji.

**Faza 4.** Korzystając z dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, uczniowie budują formuły matematyczne, które byłyby spełnione przez wszystkie trójki liczb W, S i K wpisane do tabeli. Możliwości jest wiele. Testowanie hipotez trwa od kilku do kilkunastu minut. Może zakończyć się niepowodzeniem.

**Faza 5.** Rubryka W+S powinna być dużą pomocą. Jeżeli uczniowie mają już za sobą doświadczenia w rozwiązywaniu zadań problemowych, można jej w tabeli nie umieszczać. Jeżeli mimo jej umieszczenia wielu uczniów pozostaje „w kropce”, możemy zwrócić uwagę, że we wzorze występuje jeszcze pewna stała liczba albo że we wzorze nie używamy mnożenia i dzielenia.

**Faza 6.** Przyglądamy się efektom pracy i zastosowaniom odkrytego wzoru. Dzięki niemu można sprawdzić, czy istnieją graniastosłupy o zadanych liczbach krawędzi, wierzchołków i ścian. Warto porozmawiać też o tym, czy każda trójka liczb spełniających odkryty właśnie wzór Eulera może być liczbą wierzchołków, krawędzi i ścian pewnego graniastosłupa. Jeśli nie, warto znaleźć przykład.

**Faza 7.** To faza uogólnienia wzoru. Jeśli wydaje się on prawdziwy dla graniastosłupów (nie jesteśmy absolutnie pewni, że tak jest, ponieważ nie udowodniliśmy tego wzoru), to możliwe, że będzie on prawdziwy także dla ostrosłupów. Dlaczego nie sprawdzić?

| Ostrosłup o podstawie... | Liczba wierzchołków W | Liczba ścian S | Liczba krawędzi K | Czy W + S = K+2 |
|---|---|---|---|---|
| trójkątnej | | | | |
| czworokątnej | | | | |
| pięciokątnej | | | | |
| sześciokątnej | | | | |
| siedmiokątnej | | | | |

Warto wypisać, jakie inne zależności dotyczą liczby wierzchołków i krawędzi lub krawędzi i ścian w graniastosłupach i ostrosłupach. Czy są one takie same dla tych brył?

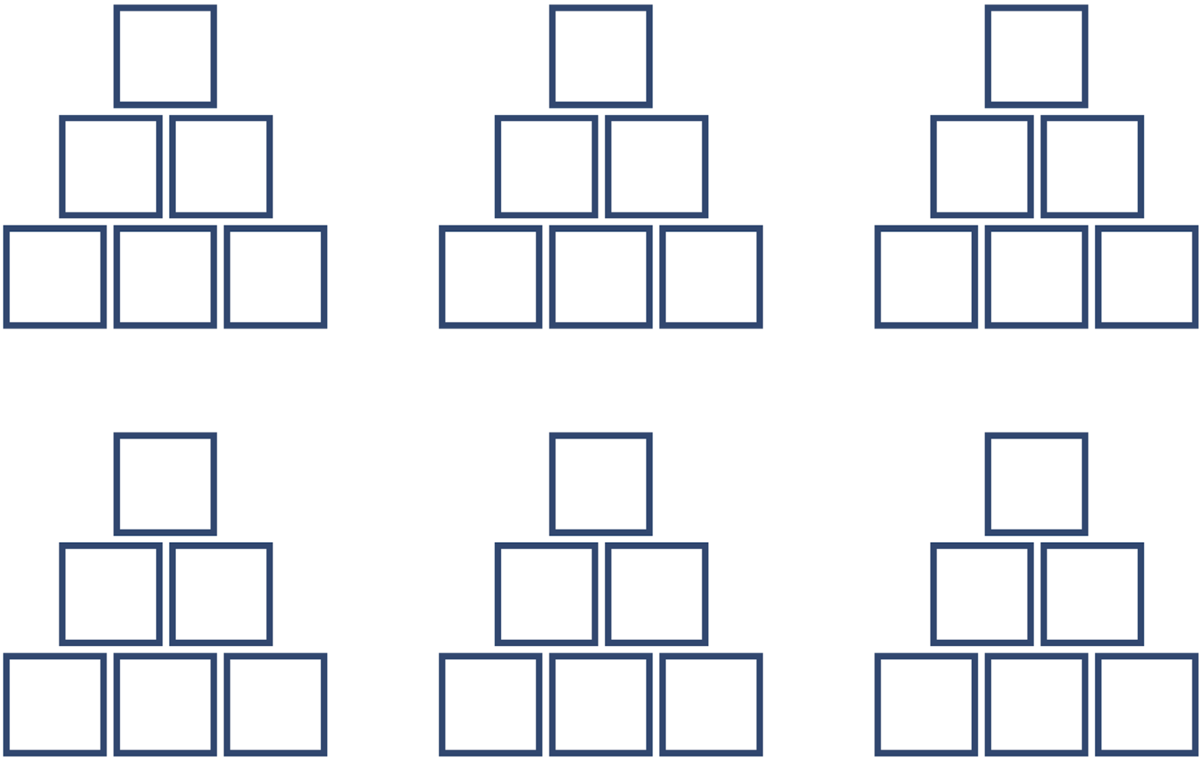
## Zadanie dla klas VII–VIII

**Piramidki**

**Cele**

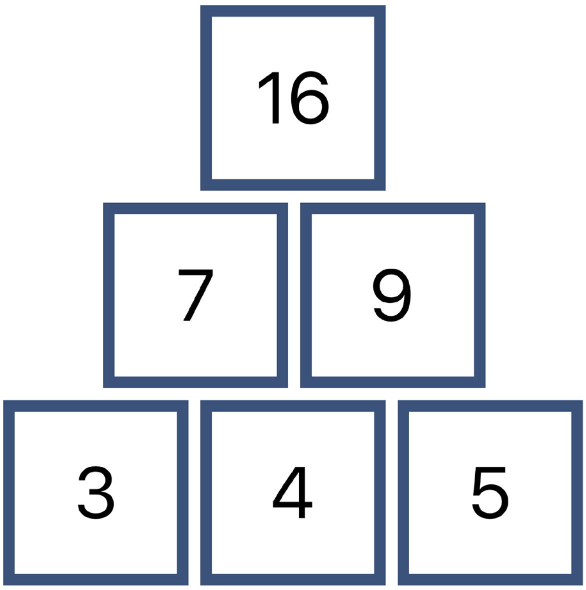
- obserwowanie przypadków i uogólnianie,
- prowadzenie rozumowania typowego dla algebry,
- przekształcanie prostych wyrażeń algebraicznych.

**Potrzebne materiały:** kartki z piramidkami.



**Faza 1.** Uczniowie pracują indywidualnie. Przygotowują wyłącznie długopisy.

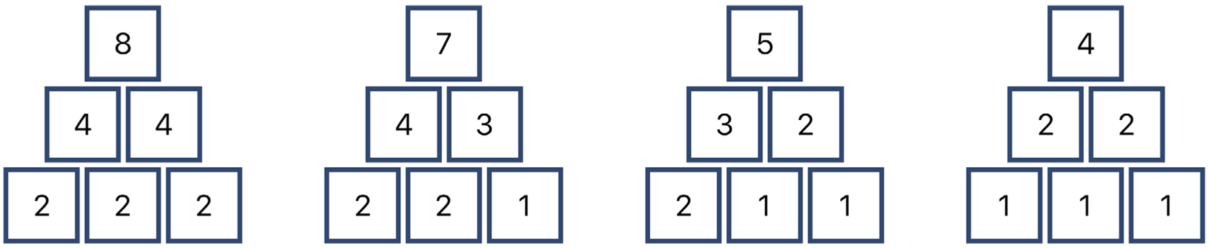
**Faza 2.** Nauczyciel: „Dzisiejsze zadanie problemowe będzie dotyczyło prostych piramidek liczbowych. Wiecie, jak się je buduje. Przypomnijmy sobie”.



Każda liczba od rzędu drugiego w górę jest sumą dwóch liczb umieszczonych pod nią. Od liczb umieszczonych w pierwszym rzędzie na dole zależy, czy liczba na górze będzie parzysta, czy nieparzysta, a może też liczby te mają wpływ na inne własności liczby na samej górze. Popracujmy nad odkryciem jak największej liczby prawidłowości. Oto wasze puste piramidki. Wpisujcie w nie liczby, stawiajcie hipotezy, testujcie je i zapisujcie, jeśli waszym zdaniem okażą się prawdziwe".

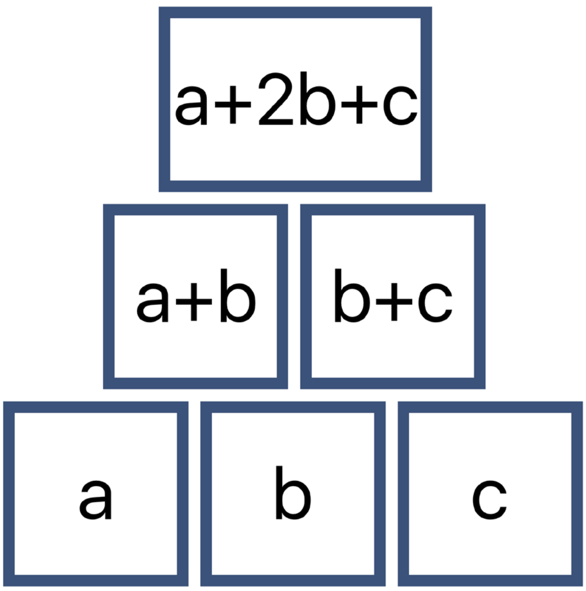
**Faza 3.** Uczniowie przygotowują piramidki i strategie wpisywania liczb, rozpisują różne warianty w rodzaju: (parzysta, parzysta, parzysta), (parzysta, parzysta, nieparzysta) itd.

**Faza 4.** Uczniowie wybierają reprezentantki poszczególnych podzbiorów i wpisują je do piramidek. Obserwują, jak zmienia się wartość i rodzaj liczby na szczycie piramidki. Zbieramy hipotezy.




W dwóch na cztery możliwe rozkłady liczb w dolnym wierszu piramidki na szczycie pojawiła się liczba parzysta. Od czego zależy ten wynik?

**Faza 5.** Z ewentualnego utknięcia w tym zadaniu można wybrnąć, obserwując liczby w środkowym wierszu. Skąd się biorą parzyste liczby? Są sumami dwóch parzystych albo dwóch nieparzystych liczb poniżej. Do tego typu rozumowania skłaniać powinna ta faza zadania. Jednak prawdziwe wyjście z impasu i rozbudowanie zadania o kolejne własności będzie możliwe, gdy wprowadzimy oznaczenia literowe.



Piramidka pokazuje, że rodzaj liczby na górze zależy wyłącznie od liczby A i C. Eureką jest tu przejście z konkretnych liczb na wyrażenia algebraiczne. Teraz można podstawiać za A, B i C liczby różnych postaci i obserwować, jak będzie zmieniała się liczba na górze. Od czego będzie zależała np. jej podzielność przez 3?

**Faza 6.** Zbieramy hipotezy i twierdzenia uczniów. Zapisujemy je i weryfikujemy.

**Faza 7.** Ta faza nieco nam się skurczy, jeżeli uczniowie będą dostatecznie twórczo opracowywali liczbowe piramidki w fazie 5.

# Zadania wykraczające poza podstawę programową

## Zadania konstrukcyjne

Można zaryzykować następujące twierdzenie: wycofanie z programów nauczania ciekawych zadań konstrukcyjnych (pozostawiono wyłącznie proste konstrukcje elementarne) miało wpływ na obniżeniem poziomu wyników kształcenia w zakresie uzasadniania poprawności matematycznych wywodów, w tym w zakresie umiejętności związanych z dowodzeniem twierdzeń. Nie ma lepszego przykładu zadania problemowego, wymagającego stawiania przypuszczeń i sprawdzania, czy zaprojektowany proces prowadzi do efektów spełniających warunki zadania, niż zadania konstrukcyjne w klasycznym znaczeniu tego słowa, czyli zadania, w których:

- narzędziami są cyrkiel i linijka bez podziałki,
- danymi są figury geometryczne,
- szukana jest procedura konstrukcyjna, którą trzeba opisać w punktach w postaci instrukcji,
- efektem tej konstrukcji jest figura, która spełnia wiele warunków danych w zadaniu.

Bardziej złożone opisy konstrukcji, stanowiące rozwiązanie zadania, składają się z sekwencji następujących konstrukcji elementarnych:

- symetralnej odcinka,
- dwusiecznej kąta,
- trójkąta równobocznego,
- kąta przystającego do danego,
- prostej równoległej do danej,
- prostej prostopa

Ważnym etapem rozwiązania zadania jest uzasadnienie poprawności konstrukcji, czyli uzasadnienie, że przeprowadzone etapy konstrukcji skutkują odpowiednią własnością skonstruowanej figury. Czasem w uzasadnieniu trzeba też oprzeć się na twierdzeniu, o którym nie ma mowy w treści zadania.

Zadania konstrukcyjne ze względu na specyfikę swego rozwiązania są ściśle skorelowane z umiejętnościami wymaganymi od programistów. Mają więc duże znaczenie nie tylko dla rozwoju rozumowania matematycznego, ale też dla edukacji informatycznej.

Znaczenie dla edukacji informatycznej można też uwypuklić, kiedy do opracowywania konstrukcji używa się takich programów jak Geogebra czy Cabri. Doceńmy ten rodzaj zadań na następującym przykładzie.

Poszukiwanie konstrukcji to klasyczny typ zadań problemowych. Na szczególną uwagę zasługuje w nim faza „bycia w kropce” oraz faza uzasadniania poprawności rozumowania.

Poniższe zadania wykraczają poza podstawę programową.

## Zbuduj trójkąt

**Cele**

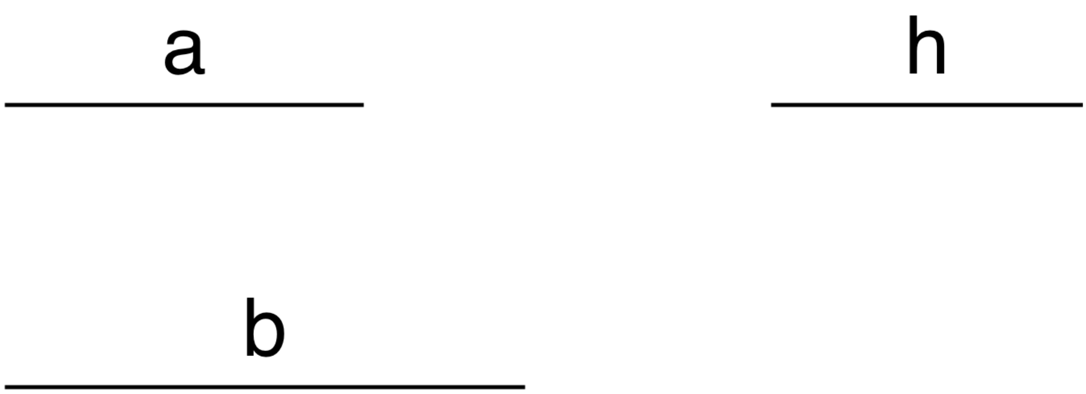
- zastosowanie elementarnych konstrukcji geometrycznych do rozwiązywania zadań,
- kształcenie rozumowania dedukcyjnego, formułowania warunków i sprawdzania, czy konstruowana figura je spełnia.

**Potrzebne materiały:** karteczki z zadaniami problemowymi, które przekażemy uczniom.

**Faza 1.** Uczniowie mają do dyspozycji cyrkle, linijki, ołówki i kartki bez linii. Mają za sobą zajęcia utrwalające podstawowe konstrukcje geometryczne i znają wymagania dotyczące pracy nad zadaniem i redakcją rozwiązania zadania konstrukcyjnego.

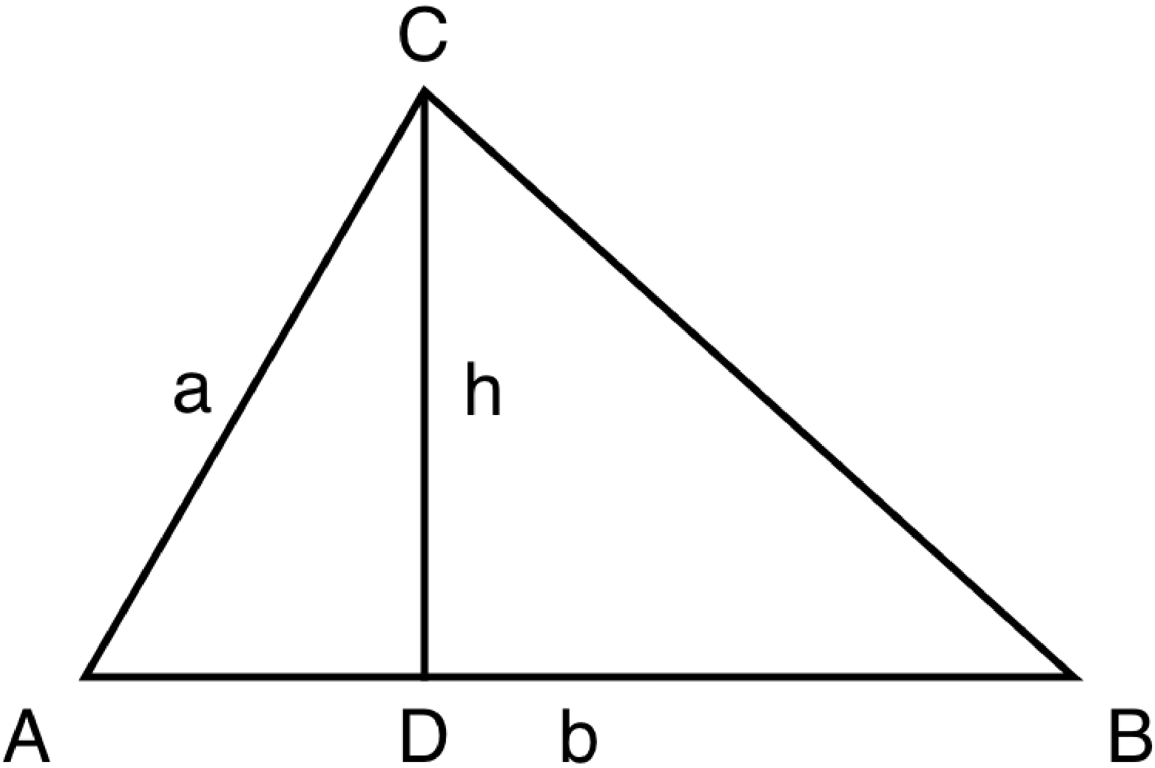
**Faza 2.** Nauczyciel: „Dzisiaj będziemy nadal opisywać konstrukcje trójkątów, mając dane charakterystyczne: ich odcinki albo odcinki i kąty. Będziecie mogli korzystać z Geogebry, ale też poproszę was o wykonanie konstrukcji za pomocą tradycyjnych cyrkli i linijek.

Oto wasze pierwsze zadanie problemowe. Skonstruuj trójkąt, mając dane dwa jego boki i wysokość opuszczoną na jeden z nich”.



**Faza 3.** Przygotowanie polega na wykonaniu następujących, względnie stałych czynności.

Uczeń sporządza odręczny szkic przedstawiający poszukiwany trójkąt. Widzi cel, ku któremu zmierza.




Uczeń spisuje warunki, które łączą efekt i dane zadania:

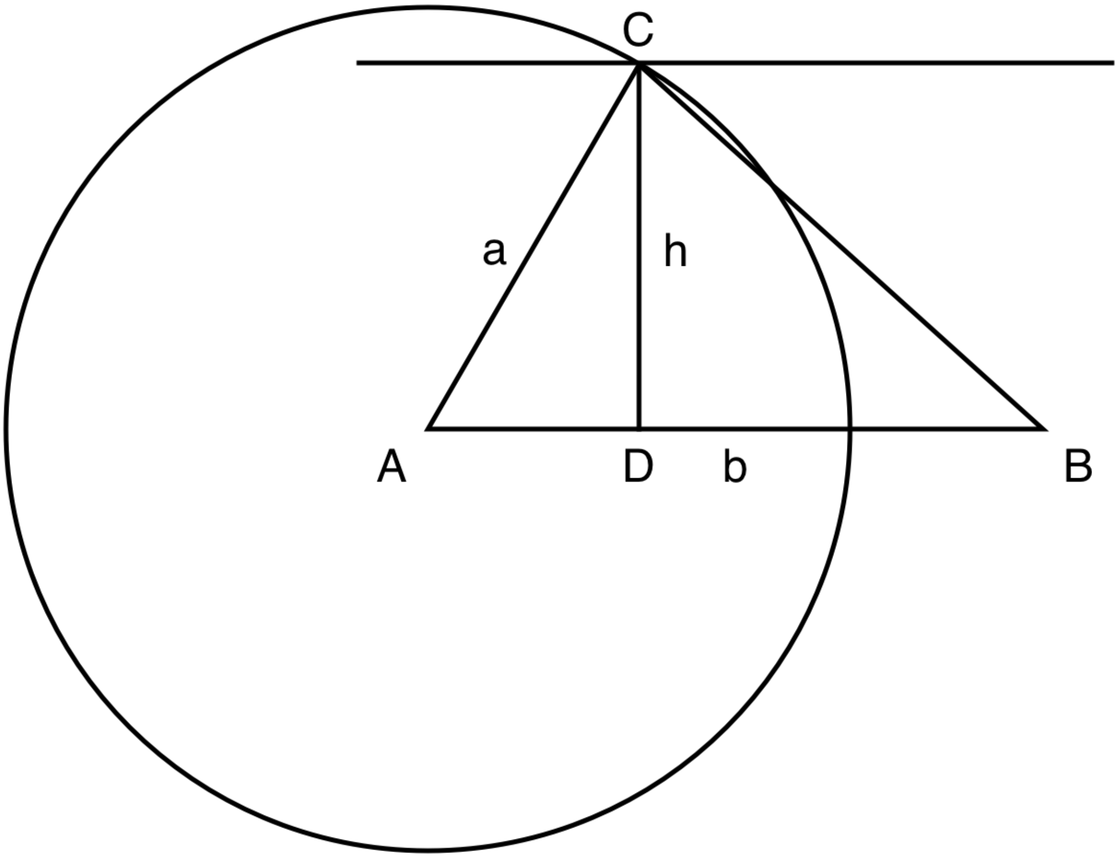
1. AB = b
2. AC = a
3. CD = h

Uświadamia sobie, że szuka konstrukcji trójkąta ABC.

Uczeń przypomina sobie kilka elementarnych konstrukcji, które, jak mu podpowiada intuicja, mogłyby się przydać w zadaniu: konstrukcja trójkąta, gdy dane są trzy odcinki, konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej.

**Faza 4.** Uczeń za pomocą cyrkla i linijki konstruuje trójkąt. Domyśla się, że kluczowe dla zadania jest skonstruowanie punku C. Zanim utknie w tych poszukiwaniach, powinien skonstruować odcinek AB oraz okrąg o środku w punkcie A i promieniu a. Punkt C jest jednym z punktów tego okręgu.

**Faza 5.** Trudność sprawić może umieszczenie w konstrukcji odcinka h. W pokonaniu tej trudności może pomóc naszkicowanie okręgu i prostej równoległej do odcinka b, poprowadzonej w odległości h od tego odcinka.




Prosta ta przetnie okrąg w dwóch punktach, w tym w wierzchołku C. Czy drugi punkt przecięcia może być wierzchołkiem C drugiego rozwiązania? Eureka!

**Faza 6.** Uczeń opisuje konstrukcję prowadzącą jego zdaniem do powstania rysunku analogicznego do zakończonego właśnie szkicu.

1. Kreślę odcinek b (AB).

2. Kreślę okrąg o środku w punkcie A i promieniu a.

3. Kreślę prostą prostopadłą do AB i okrąg o środku w punkcie przecięcia tej prostej z odcinkiem AB o promieniu h.

4. Przez drugi koniec odcinka h prowadzę prostą równoległą do AB, która przetnie okrąg z punktu 1 w punktach C1 i C2. Każdy z tych punktów może być trzecim wierzchołkiem szukanego trójkąta ABC.

Uczeń przeprowadza opis poprawności konstrukcji. Pisze, że:

- Warunek 1. AB = b spełniony jest na podstawie punktu 1 opisu konstrukcji.
- Warunek 2. AC = a spełniony jest na podstawie punktu 2 opisu konstrukcji.
- Warunek 3. CD = h spełniony jest na podstawie punktów 3 i 4 opisu konstrukcji.

W wyniku konstrukcji otrzymaliśmy dwa równoważne rozwiązania tego problemu.

**Faza 7.** Nauczyciel pyta o to, czy zadanie ma rozwiązanie niezależnie od długości wybranych odcinków. Podsuwa też inne problemy do rozwiązania, np.

- Skonstruuj trójkąt, mając dane dwa boki i wysokość opuszczoną na trzeci bok.
- Skonstruuj trójkąt, mając dane jeden bok i dwie wysokości, w tym jedną opuszczoną na dany bok.
- Czy jeżeli spośród trzech boków i trzech wysokości wybierzemy dowolne trzy (np. trzy wysokości), czy zawsze uda nam się skonstruować trójkąt?

# Zadania problemowe

## Zadanie dla uczniów klas V–VIII

**Dwa kwadraty**

Zadania problemowe sprawiają uczniom wiele kłopotów, ponieważ do ich rozwiązania nie wystarczy znajomość elementarnych procedur, schematów. „Trzeba wpaść na rozwiązanie” – mówią uczniowie. Co to znaczy „wpaść na pomysł rozwiązania”? Wielu uważa, że trzeba mieć jakieś wrodzone zdolności wykraczające poza normę, talent do matematyki. My staramy się im udowodnić poprzez praktykę, że to jest umiejętność, której można i trzeba się nauczyć, a talent to przede wszystkim systematyczna praca.

Istotnie, co można sprawdzić na wielu przykładach, do tego, żeby każdy przeciętnie uzdolniony matematycznie uczeń mógł radzić sobie w sytuacjach problemowych, wystarczy odpowiedni trening. Dzięki niemu uczeń wypracowuje sobie kilkanaście heurystycznych strategii. W poprzednim zadaniu omówiliśmy procedurę, która spełnia rolę schematu lub planu, przeprowadzającego przez zasadnicze trudności zadania (dobrze się przygotuj do ataku na problem, wykonaj szkic, zapisz warunki itp.).

Sytuacja problemowa dotyczyć może też ułożenia zadania i rozwiązania go. Czasem wystarczy popatrzeć na rysunek, aby ułożyć treść zadania. Czasem można podać treść zadania bez pytania. Zadaniem uczniów jest ułożenie jak największej liczby ciekawych pytań.

**Sytuacja problemowa**

**Cele**

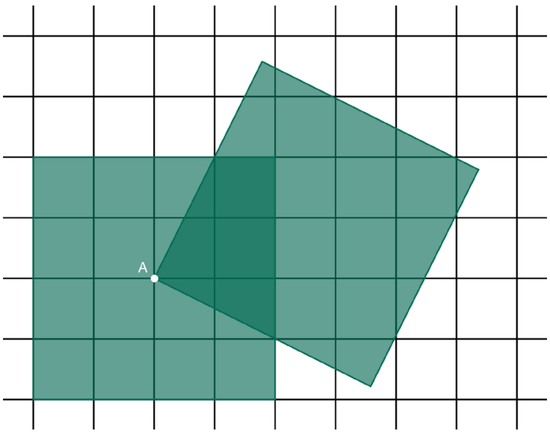
- kształcenie umiejętności stawiania pytań problemowych,
- wyznaczanie pól części wspólnych figur różnymi metodami.

**Potrzebne materiały:** dwa jednakowe kwadraty wycięte z sieci kwadratowej na każdą parę uczniów.

**Przebieg zajęć**

**Faza 1.** Uczniowie przygotowują się do zadania. Bawią się kwadratami, ale ich nie zginają. Badają wzajemne położenia, sprawdzają, że figury są przystające.

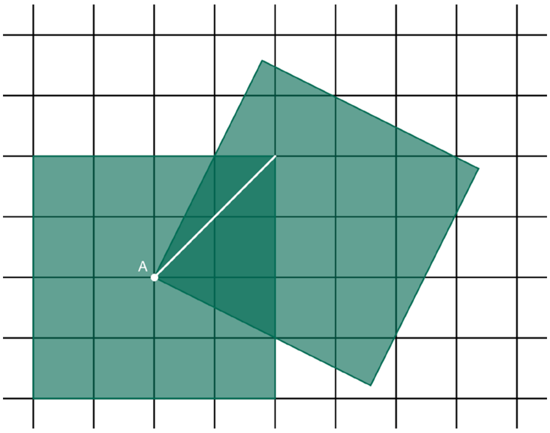
**Faza 2.** Nauczyciel: „Zwykle to ja wam daję zadanie problemowe do rozwiązania, a dzisiaj wy sami spróbujecie je ułożyć". Toczy się burza mózgów. Nauczyciel skrzętnie notuje propozycje uczniów, a w końcu, jeśli nie pada ta propozycja mówi: „A jakie polecenie można sformułować do takiego położenia kwadratów?".




Chodzi nam o polecenie: Zmierz pole części wspólnej kwadratów. Będziemy zakładać, zgodnie z obrazem, że przecinające się boki kwadratów dzielą boki tego z lewej w stosunku 1:3.

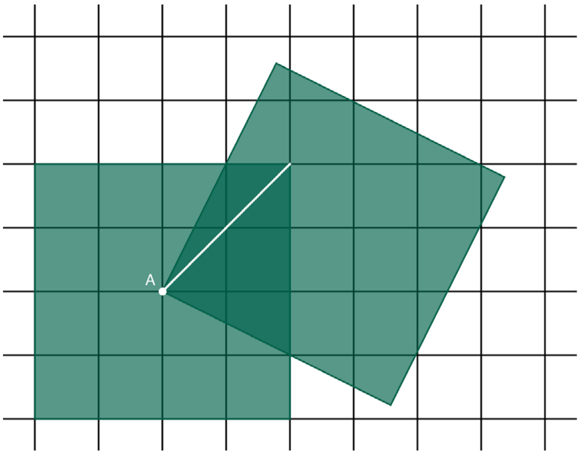
**Faza 3.** Uczniowie rozwiązują wybrane problemy, wymyślone wcześniej, także ten, w którego skonstruowaniu pomógł nauczyciel. Skupmy się teraz na nim.

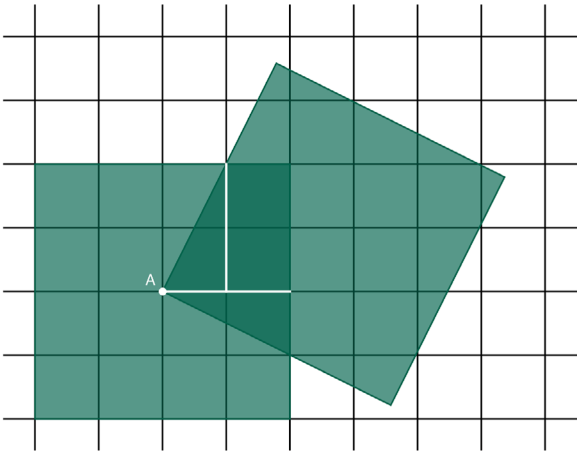
Uczniowie przywołali już podobne zadania, próbują podzielić czworokąt części wspólnej na figury, których pole potrafią obliczyć i już są gotowi do ataku.




**Faza 4.** Zadanie można rozwiązać na kilka sposobów, które warto przywołać w podsumowaniu. Zanim zostaną odkryte, może nastąpić moment pierwszej porażki.

**Faza 5.** Umiejętnością, którą uczniowie muszą zdobyć, rozwiązując tego typu zdanie, jest umiejętność dorysowywania do rysunku odpowiednich odcinków, np.




Dostrzeżenie jednej z tych możliwości będzie punktem przełomowym rozwiązania.

**Faza 6.** To zadanie można też postawić od razu w formie ogólnej. Położenie kwadratów, z których jeden jest zaczepiony w środku drugiego jest dowolne. Należy zbadać, jak zmienia się pole części wspólnej tych figur, gdy obracamy je względem siebie, zachowując pozycję wierzchołka A.

Warto więc wrócić do tego zadania w tej właśnie postaci za jakiś czas. Kolejną umiejętnością ćwiczoną podczas rozwiązywania takich zadań jest rozważanie na początku prostych, szczególnych przypadków. Tutaj: przypadku, gdy odpowiednie boki są do siebie prostopadłe. Pierwszy sukces, czyli zmierzenie pola (4), dodaje chęci do dalszej pracy i pozwala postawić pierwsze przypuszczenie: a może to pole się nie zmienia. Teraz uzasadnienie tego przypuszczenia staje się celem zadania.

W omówieniu rozwiązań akcentujemy różnorodność sposobów dojścia do wyniku.

**Faza 7.** Uczniowie opowiadają o drodze, którą przeszli. Zastanawiają się, czy podobne zadanie można by ułożyć (i podobnie rozwiązać) o trójkącie równobocznym albo dowolnym prostokącie. Odkrywają, że pole części wspólnej stanowi czwartą część pola jednego kwadratu.

# Zagadki logiczne

## Zadania dla uczniów klas IV–VIII

**Cele**

- kształcenie rozumowania logicznego, konstruowania związków przyczynowo-skutkowych i technik radzenia sobie w sytuacjach problemowych bez wyraźnego kontekstu matematycznego, czyli bez poręcznych modeli matematycznych ułatwiających rozwiązywanie klasycznych zadań, np. z użyciem równań.

**Potrzebne materiały:** zbiór prostych i bardziej złożonych zagadek logicznych i tak zwanych paradoksów.

Przebieg zajęć

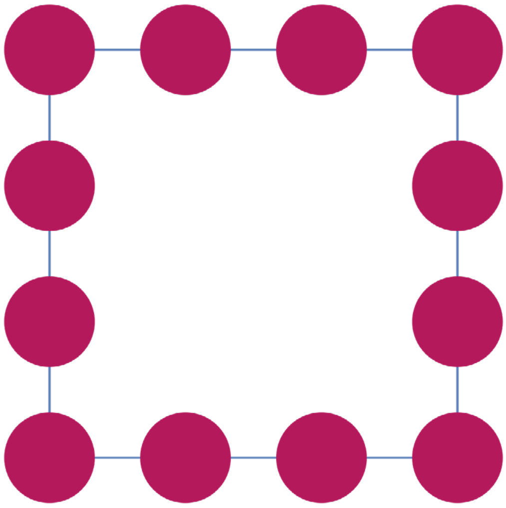
**Faza 1.** Uczniowie mają przed sobą papier do notatek i przybory do pisania, kredki.

**Faza 2.** Nauczyciel: „Wszyscy wiedzą, że aby dobrze używać matematyki, trzeba umieć logicznie myśleć. Jak się tego nauczyć? Po prostu trzeba rozwiązywać odpowiednie zadania. Dzisiaj będziemy rozwiązywać zagadki logiczne. Przygotowałem na kartce kilka z nich. W określonym czasie rozwiążcie ich jak najwięcej”.

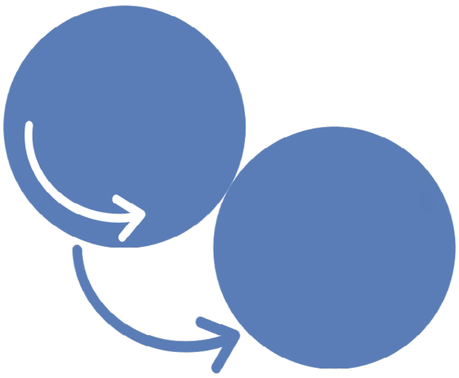
Przykładowa lista zagadek:

Zadanie 1. Z miasta A do miasta B jedzie pociąg. Po równoległym torze z miasta B do miasta A też jedzie pociąg. Odległość między miastami wynosi 500 km. Każdy z pociągów porusza się z prędkością 100 km/h. Od pociągu do pociągu lata mucha. Porusza się ona z prędkością 25 km/h. Jaką drogę przebędzie mucha od momentu wyruszenia pociągów do momentu ich spotkania na równoległych torach?

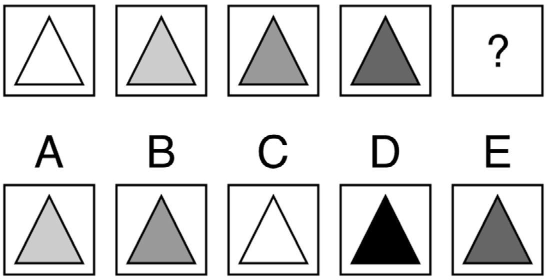
Zadanie 2. Zmień położenie monet, żeby wzdłuż jednego boku kwadratu leżało ich 5, a nie 4.

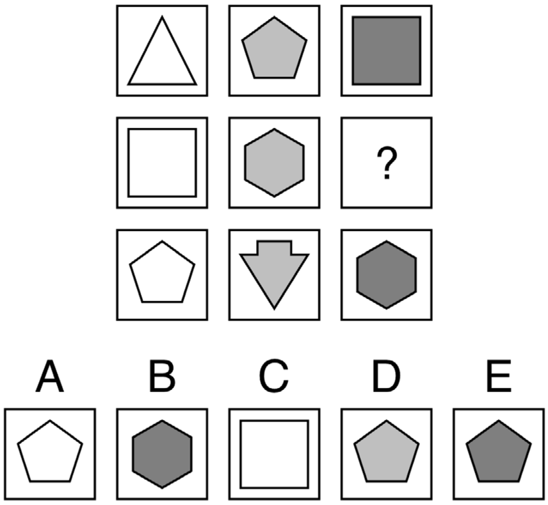


Zadanie 3. Ile obrotów wykona jedna moneta wokół drugiej, jeśli będziemy ją obracać po obwodzie tej drugiej?

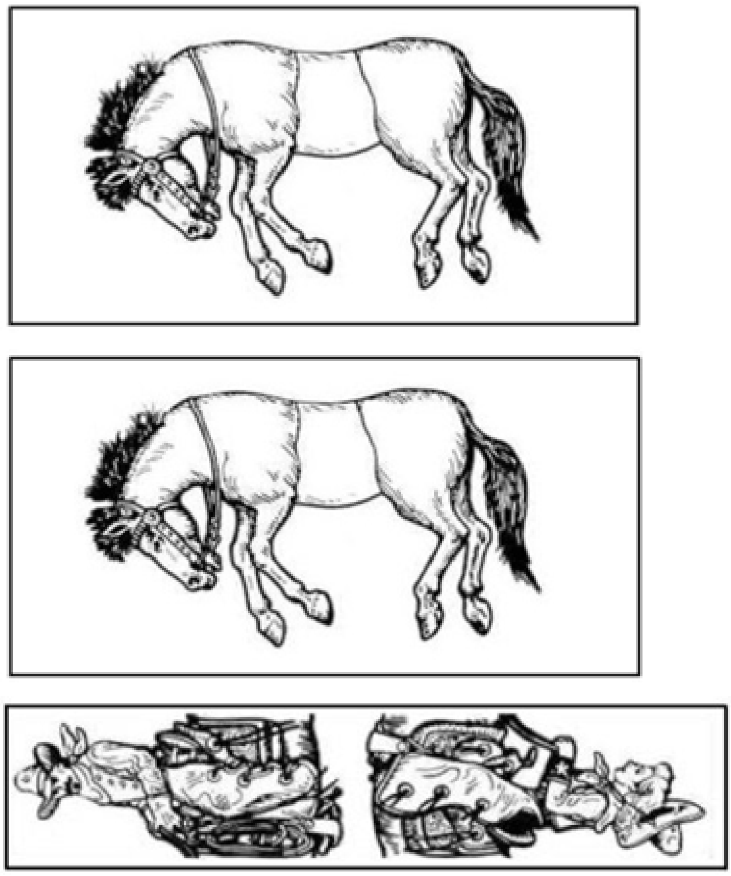


Zadanie 4. Wiele firm podczas rozmów kwalifikacyjnych testuje kandydatów na pracowników. Oto dwa przykłady testów pewnej firmy.




Zadanie 5. Wytnij i złóż elementy układanki, aby jeźdźcy siedzieli na koniach.

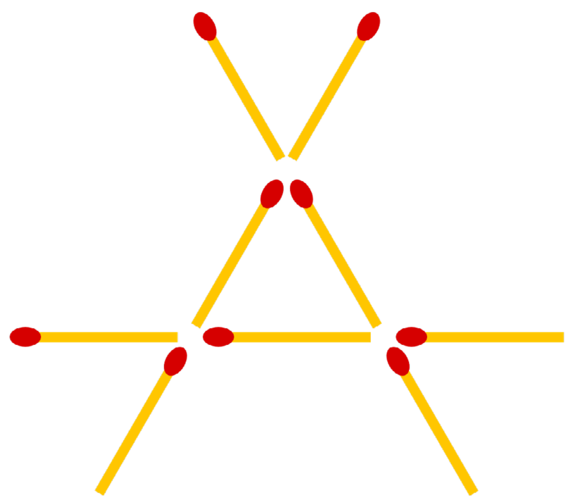


Zadanie 6. Z drewnianej beczki o pojemności 100 l wypełnionej po brzegi wodą należy odlać połowę. Nie dysponujemy żadnym dodatkowym naczyniem. Jak tego dokonać?

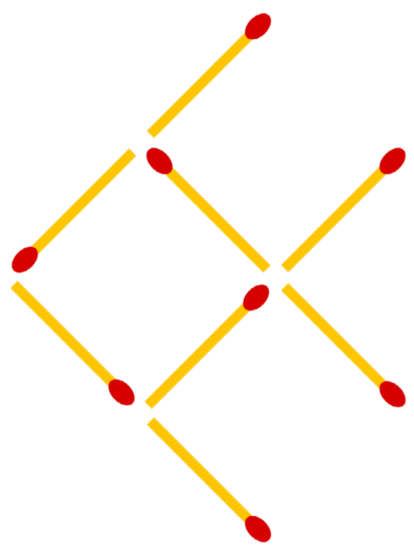
Zadanie 7. Mamy zmierzyć linijką odległość pomiędzy najbardziej od siebie oddalonymi wierzchołkami prostopadłościennego zaklejonego pudełka. Jak to zrobić?

Zadanie 8. Na rozstajach dwóch dróg spotykamy dwie osoby, o których wiemy tylko tyle, że jedna mówi zawsze prawdę, a druga zawsze kłamie, ale nie wiemy, która. Chcemy zapytać o drogę do miasta A. Tylko jedna z dróg tam prowadzi. Jak sformułować pytanie, żeby odpowiedź pozwoliła nam dostać się tam, dokąd idziemy?

Zadanie 9. a) Przełóż 4 zapałki, aby powstały 4 trójkąty o boku długości jednej zapałki.



b) Przełóż 3 zapałki, aby ryba była zwrócona w prawą stronę.



**Faza 3.** Przygotowanie do rozwiązywania zestawów zagadek mija się z celem. Rozwiązywanie odbywa się w trybie „kto szybciej odgadnie”, więc nie jest zbyt efektywne. Ten etap może dostarczyć argumentów, że nie należy się śpieszyć i najpierw dobrze przygotować do pracy.

**Faza 4.** Uczniowie sprawdzają, co jest lepsze: atakowanie wszystkich zagadek jednocześnie, czy atakowanie po kolei? Czy zaczynamy od najtrudniejszych dla siebie, czy od najłatwiejszych? Odpowiedź na to drugie pytanie „od najłatwiejszych” nie musi być poprawna.

**Faza 5.** Atak na niektóre zagadki może zakończyć się utknięciem. Uczniowie ćwiczą odporność emocjonalną oraz rozumowanie dywergencyjne, czyli wielotorowe, wykraczające poza utarte schematy postępowania.

**Faza 6.** Podsumowanie rozwiązań, ale przede wszystkim rozmowa z uczniami o ich sposobach dojścia do rozwiązań. Niektóre zagadki można rozwiązać metodą prób i błędów. Inne – dzięki odrzuceniu pierwszego, intuicyjnego pomysłu na rozwiązanie.

**Faza 7.** Warto poszukać i stworzyć zbiór zagadek logicznych. Może też wywieszać je na specjalnej gazetce ściennej. Na stronach WWW poświęconych zagadkom logicznym i testom na inteligencję można znaleźć wiele problemów, dzięki którym mózg nabywa trwałych sprawności rozumowania.

## Zadania dla klas IV–VIII

Zadania matematyczne zazwyczaj zawierają dane oraz pytanie związane z treścią zdania. Omawialiśmy już zadania, w których brakuje pytań. Możliwe są też pytania, w których brakuje informacji niezbędnych do udzielenia odpowiedzi. Dodatkowo muszą one mieć specyficzną konstrukcję: dotyczą szacowania miar zjawisk w dużych skalach. Takie pytania to pytania Fermiego.

**Pytania Fermiego**

**Cele**

- kształcenie dociekliwości i umiejętności wyszukiwania informacji potrzebnych do rozwiązania zadania.

**Przebieg zajęć**

**Faza 1.** Uczniowie mają dostęp do internetu.

**Faza 2.** Nauczyciel przedstawia informacje biograficzne na temat naukowca:

> **Enrico Fermi** (1901–1954) to włoski fizyk, profesor uniwersytetu w Rzymie, Nowym Jorku, Chicago i jeden z najwybitniejszych umysłów XX wieku. Był twórcą podstaw

energetyki jądrowej, kierował pracami nad bombą atomową, uruchomił pierwszy reaktor jądrowy. W 1938 r. otrzymał Nagrodę Nobla za pracę, w której przedstawił m.in., jak można rozbić jądro uranu, bombardując je neutronami. Znany był z tego, że w swoich pracach posługiwał się prostym i zrozumiałym językiem, uważał, że zbytni formalizm nie jest potrzebny.

Bardzo lubił rozwiązywać nietypowe problemy, w których musiał szacować różne dziwne wielkości. Najsłynniejsze pytanie Fermiego to: Ile ziarenek gorczycy znajduje się w 1 litrowym słoiku?

Tematem pracy badawczej ucznia w ramach metody problemowej może być rozwiązywanie zagadek określanych jako pytania Fermiego. Oto kilka przykładowych:

1. Jak długą kolejkę utworzyłyby wszystkie samochody osobowe wyprodukowane w ciągu roku na całym świecie?

2. Ile kilogramów chleba zjadasz w ciągu roku? Ile mąki potrzeba na wyprodukowanie takiej ilości chleba? Jaki obszar ziemi należałoby obsiać zbożem, aby można było otrzymać taką ilość mąki?

3. Jak dużą powierzchnię zajęłyby podręczniki do matematyki wszystkich uczniów twojej szkoły, gdyby je ułożyć jeden obok drugiego? Czy to więcej niż powierzchnia boiska szkolnego? Jak wysoki byłby stos ułożony z tych podręczników, gdyby je ułożyć jeden na drugim? Czy byłby wyższy niż najwyższy budynek w miejscowości, w której mieszkasz?

4. W czasie pewnej ulewy na Warszawę spadło 30 mm wody na cm2. Ile litrów wody deszczowej przypadło na jednego mieszkańca stolicy? Ile kąpieli w wannie można zrobić, korzystając z całej tej deszczówki?

5. Ile kilometrów ulic i ile kilometrów kabli znajduje się w naszych miastach i miasteczkach? Ile kilometrów przewodów rozciągniętych jest w naszych domach i pod nimi?

**Faza 3.** Uczniowie zastanawiają się, jakie informacje są im potrzebne i jak je znaleźć. Przygotowują też narzędzia w postaci wzorów, które mogą być użyteczne.

**Faza 4.** Uczniowie atakują problemy.

**Faza 5.** Uczniowie utykają z powodu braku danych lub niemożności zastosowania wzoru.

**Faza 6.** Uczniowie dzielą się rozwiązaniami, wyszukują różnice pomiędzy wynikami i zastanawiają się, skąd wynikają te różnice.

**Faza 7.** Uczniowie wyszukują lub wymyślają podobne pytania.

Powyższe pomysły na zajęcia nie wyczerpują oczywiście ani wszystkich możliwych typów działań poszukujących, ani tym bardziej całej różnorodności samych zadań, ćwiczeń i pomysłów możliwych do zastosowania na zajęciach prowadzonych metodą problemową.

# Bibliografia

Mason J., Burton L., Stacey K., (2005), Matematyczne myślenie, Warszawa: WSiP.

Matematyka 1. Podręcznik dla gimnazjum, (2015), Dobrowolska M. (red.), Gdańsk: GWO.

Okoń W. (1964), U podstaw problemowego uczenia się, Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

Pisarski M., (2004), Matematyka dla naszych dzieci, Opole: Wydawnictwo Nowik.

Polya G., (2012), Jak to rozwiązać?, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Tokarz T., (2016), Coaching w szkole, „Sygnał. Magazyn Wychowawcy" nr 4, s. 42–45 [także online, dostęp dn. 13.10.2017, pdf. 4,4 MB].

# Spis tabel