Zestaw 10

Zeszyt 3

Marek Pisarski

Jak rozwijać myślenie długofalowe za pomocą edukacji matematycznej?

- Myślenie długofalowe jako proces rozciągnięty w czasie a cele dydaktyczne
- Myślenie długofalowe i cele strategiczne a strategiczne planowanie
- Plan rozwijania długofalowego myślenia naszych uczniów

Recenzja
Jolanta Lazar

Analiza merytoryczna
Elżbieta Miterka

Redakcja językowa i korekta
Anna Wawryszuk

Projekt graficzny, projekt okładki
Wojciech Romerowicz, ORE

Skład i redakcja techniczna
Grzegorz Dębiński

Projekt motywu graficznego „Szkoły ćwiczeń”
Aneta Witecka

ISBN 978-83-65967-00-8 (Zestawy materiałów dla nauczycieli szkół ćwiczeń – matematyka)
ISBN 978-83-65967-41-4 (Zestaw 10: Wykorzystanie potencjału otoczenia w edukacji matematycznej)
ISBN 978-83-65967-44-2 (Zeszyt 3: Jak rozwijać myślenie długofalowe w edukacji matematycznej dzieci starszych i młodzieży?)

Warszawa 2017
Ośrodek Rozwoju Edukacji
Aleje Ujazdowskie 28
00-478 Warszawa
www.ore.edu.pl

Publikacja jest rozpowszechniana na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Użycie niekomercyjne 3.0 Polska (CC-BY-NC).

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Spis treści

Wstęp **3**

Myślenie długofalowe jako proces rozciągnięty w czasie a cele dydaktyczne **3**

Cele długoterminowe jako wizje przyszłości 5

Myślenie długoterminowe a myślenie strategiczne 6

Od czego zacząć zatem rozwijanie myślenia długofalowego? **7**

Myślenie długofalowe i cele strategiczne a strategiczne planowanie **8**

Plan rozwijania długofalowego myślenia naszych uczniów **10**

Jak rozwijać myślenie długofalowe – trzy przykłady projektów dydaktycznych **14**

Przykład 1 14

Przykład 2 17

Przykład 3 20

Podsumowanie 26

Bibliografia **27**

Wstęp

Myślenie jest procesem poznawczym, rozciągniętym w czasie. Człowiek myślący kojarzy informacje, przekształca je, łączy i wyciąga wnioski, które wykraczają poza przesłanki, a także poza to, co jest widoczne gołym okiem. To wykraczanie, dzięki któremu generowane są nowe informacje, jest też cechą charakterystyczną myślenia matematycznego i doświadczeń związanych z uczeniem się matematyki, a zatem powinny być udziałem każdego ucznia rozwiązującego zadania. Stawiając czoło problemom matematycznym, uczeń zdobywa umiejętności kodowania informacji i związków między nimi (matematyka to system kodów o cechach każdego języka), a następnie, operując nimi, wyprowadza nowe informacje, którymi wcześniej nie dysponował.

Podejmowane działania są celowe i w uporządkowany sposób zorganizowane, trwają relatywnie krótko, gdyż ogólnym celem kształcenia jest wypróbowanie i utrwalenie dużej liczby sposobów i strategii radzenia sobie w sytuacjach problemowych. Działania te zatem wymagają treningu, którego ważną cechą i zaletą jest różnorodność, a wadą, że żaden nie wykształca trenowanych umiejętności w stu procentach. Ponieważ wprowadza się do użytku wiele znaków matematycznego kodu i wiele sposobów przeprowadzania jednych zapisów w inne, dojście do wprawy w posługiwaniu się językiem matematyki wymaga wielu lat nauki.

Wspominaliśmy, że miękkie kompetencje związane z elastycznością, motywacją do podejmowania wyzwań, uczeniem się rozwiązywania nowych problemów, racjonalnym podejmowaniem decyzji itp. należą do ważnych umejętności przydatnych w codziennym życiu. Nie było jednak dotąd mowy o co najmniej jednej ważnej kompetencji, której, jak się wydaje, szkoła do tej pory nie brała pod uwagę w swoich programach nauczania. Chodzi o kompetencje związane z tak zwanym myśleniem długofalowym czy też długoterminowym.

Myślenie długofalowe jako proces rozciągnięty w czasie a cele dydaktyczne

W obecnej podstawie programowej słowo „długofalowe” nie występuje, a termin „długoterminowe” pojawia się w dwóch kontekstach:

- edukacji zdrowotnej: „uczeń omawia krótkoterminowe i długoterminowe konsekwencje zachowań sprzyjających (prozdrowotnych) i zagrażających zdrowiu”;

- pracy z uczniem o specjalnych potrzebach rozwojowych i edukacyjnych: „indywidualny program edukacyjno-terapeutyczny określa zoperacjonalizowane cele krótko i długoterminowe, uwzględniające zdiagnozowane potrzeby ucznia”. (Podstawa…, 2017)

Myślenie długofalowe to jedna z miękkich kompetencji menedżerskich. Jest ono związane z wyznaczaniem celów i planowaniem w długich okresach czasowych, wykraczających poza uwzględniane zazwyczaj przez młode osoby horyzonty czasowe. Nasuwa się pytanie:

W jakim stopniu w życiu człowieka, który właśnie rozpoczął naukę w szkole podstawowej, można rozwijać myślenie długofalowe?

Przecież na świadome doświadczenia czwartoklasisty skupiają się wydarzenia z okresu zaledwie kilku lat, nieustannie przy tym ewoluując, absorbując dużą liczbę impulsów, często niekontrolowanych nie tylko przez samego ucznia, ale kontrolowanych w niewielkim stopniu przez jego rodziców, opiekunów i nauczycieli.

W jakim stopniu uczeń klasy IV jest w stanie zrozumieć chociażby podział roku szkolnego na semestry i dostosować swoje działania do celów wyznaczonych na czteromiesięczne okresy podsumowujące?

Na szczęście nie musimy stawiać sobie tak ambitnych celów jak wdrażanie dzieci w planowanie strategiczne i realizację swoich życiowych planów z pomocą kompetentnych pracowników wyspecjalizowanych placówek oświatowych. Naszym celem jest **przygotowanie** do sprostania takim długoterminowym wyzwaniom w przyszłości. Możemy być pewni, że wyzwania takie pojawią się i w dodatku będą one zupełnie inne niż te, które dziś dadzą się przewidzieć. Tą pewnością możemy dzielić się z uczniami.

Cele szkoły zapisane w jej dokumentach i programach nauczania ograniczają się do danego etapu edukacyjnego, jednak jako nauczyciele musimy nieustannie zdawać sobie sprawę, że ich efekty będą miały istotny wpływ na kariery naszych uczniów jeszcze wiele lat po ukończeniu szkoły. Ewentualne zaniedbania w tym zakresie mogą być trudne do nadrobienia. Dlatego warto wykraczać w naszym myśleniu o zadaniach stojących przed nauczycielami poza czysto programowe cele i semestralne lub roczne ramy ich realizacji.

Myślenie długofalowe to myślenie o celach ogólnych, formułowanych w sposób niekoniecznie bardzo precyzyjny. Zakresy pojęć długofalowości w rozumieniu dorosłych i rozumieniu dzieci nie muszą się pokrywać. Możemy przyjąć, że myślenie długofalowe w przypadku ucznia dotyczy najdłuższego możliwej do wyobrażenia sobie okresu czasu, np. do końca miesiąca, do ferii, do Świąt, do końca roku szkolnego, kalendarzowego. Istotne jest nie tyle to, jak długo w rzeczywistości będziemy ustawiać sobie cele, ile jakimi etapami będziemy tworzyć plany ich osiągania.

Myślenie długofalowe to myślenie o celach ogólnych, formułowanych w sposób niekoniecznie bardzo precyzyjny. Zakresy pojęć długofalowości w rozumieniu dorosłych i rozumieniu dzieci nie muszą się pokrywać. Możemy przyjąć, że myślenie długofalowe w przypadku ucznia dotyczy najdłuższego możliwego do wyobrażenia sobie okresu czasu, np. do końca miesiąca, do ferii, do świąt, do końca roku szkolnego, kalendarzowego. Istotne jest nie tyle to, jak odległe w rzeczywistości będziemy stawiać sobie cele, ile jakimi etapami będziemy tworzyć plany ich osiągania.

Myśleniu długofalowemu przypisać też należy jeszcze jedną ważną cechę: cele w nim stawiane są celami indywidualnymi, celami, które uczeń stawia sam sobie lub stawie je nauczyciel, zwracając uwagę na indywidualne możliwości i preferencje. Realizując swoje

cele uczeń nie musi porównywać się z innymi uczniami, nawet jeśli mają oni postawione podobne lub identyczne cele lub nawet jeśli ich realizacja przebiega w pewnych etapach równolegle lub podczas współpracy. Chcemy położyć tu nacisk na znaczenie indywidualnych postępów ucznia na drodze do realizacji jego osobistych celów, nie zaś na rywalizację z innymi osobami: kto wcześniej lub lepiej osiągnie swój cel. Taka rywalizacja może być korzystna podczas uczenia się na co dzień, a także gdy cele długofalowe realizowane są w ramach przedsiębiorstwa, ale szkoła nie jest firmą, a zatem rywalizacja między uczniami w zakresie realizacji celów długoterminowych nie jest ani korzystna, ani nawet możliwa.

Realizując cele długoterminowe, chcemy więc zwrócić uwagę na różnice indywidualne w ramach potrzeb i możliwości poszczególnych uczniów oraz ich tempo rozwoju intelektualnego i emocjonalnego. Dajemy im wyraźny sygnał: „nie przejmuj się, jeśli jeszcze nie umiesz, nie nauczyłeś się, nie potrafisz – pamiętaj, że masz to umieć, ale niekoniecznie dzisiaj, dopiero za… Teraz za to powinieneś nad efektami systematycznie pracować”. Ten długoterminowy cel powinien mieć określoną i zanotowaną datę realizacji.

Kompetencje związane z myśleniem długofalowym mogą wydawać się czasem sprzeczne z kompetencjami wskazywanymi jako cechy postawy przedsiębiorczej. Przykładowo, elastyczność rozumiana jest jako zdolność dostosowywania się do zmieniających się warunków, czasem prowadząca do zmiany celów działania. W myśleniu długofalowym ważne i konieczne jest utrzymywanie stałych celów, nawet gdyby warunki ich realizacji okazywały się coraz bardziej im niesprzyjające. Elastyczność jednak nadal pozostaje ważną kompetencją, podobnie jak wszystkie inne, i doceniamy ją szczególnie w niesprzyjających warunkach, kiedy strategie osiągania zaplanowanych wyników powinny być dostosowywane do nowych warunków. Co prawda nie można z góry zakładać, że nasze długoterminowe cele zostaną osiągnięte dokładnie tak, jak je zaplanowaliśmy na początku drogi, jednak ich stałość i stała obecność w świadomości ma ułatwić weryfikowanie celów pośrednich, a także ma ukierunkowywać nasze decyzje i ułatwiać podejmowanie właściwych.

Cele długoterminowe jako wizje przyszłości

Cele długoterminowe opisuje się również nierzadko jako pewne wizje przyszłości, niedoprecyzowane stany idealne, których osiągnięcie nie tyle jest koniecznym warunkiem satysfakcji, ile ma być (w najbardziej skrajnym znaczeniu) tym, co „ma nam przyświecać”, nieraz przez długie lata. Aby stawiać sobie takie cele, trzeba być człowiekiem świadomym swoich możliwości, ograniczeń, zdolnym do planowania, tworzenia strategii, trzeba być także świadomym wpływu warunków realizacji poszczególnych etapów na efekty. Te i inne kompetencje długofalowego myślenia nasi uczniowie mają sobie dopiero wyrobić. Pracują nad tym i pracowali, np. podczas zajęć, na których opisują przyszłość i swoje w niej miejsce. Są to ćwiczenia bardzo cenne z punktu widzenia kształcenia myślenia długofalowego.

Jeśli w poprzednich rozdziałach do treningu w zakresie miękkich kompetencji używaliśmy często pojedynczych zadań, metod aktywizujących skoncentrowanych na pojedynczych projektach czy przypadkach, to teraz możemy spojrzeć na uczenie się z perspektywy zbiorów wybranych zadań oraz większej liczby uporządkowanych prac o charakterze projektowym.

Naszą pracą będą kierowały zasady projektowania dydaktycznego (Gagne, 1992), w którym „wagę przywiązuje się do ciągu lekcji na dany temat, do ciągu tematów składających się na nauczanie danego przedmiotu szkolnego, a nawet całość kształcenia. Sporządzanie projektów tego rodzaju podejmują się pojedynczy nauczyciele, ale także zespoły nauczycieli, zespoły programowe, autorzy podręczników, uczeni" (Gagne, 1992: 18).

Realizując długofalowe projekty dydaktyczne nadal respektujemy zasadę, że tylko nauczyciel myślący strategicznie i długofalowo może kształcić uczniów w zakresie tej kompetencji.

Myślenie długoterminowe a myślenie strategiczne

Myślenie strategiczne jest nieodłącznym składnikiem myślenia długofalowego. Do potocznego i ekonomicznego słownika trafiło z zagadnień związanych z prowadzeniem wojen. W Zeszycie 1 Zestawu 5 wyróżniliśmy etapy rozwiązywania zadań, a wśród nich, nie bez powodu i związku z obecnie omawianym zagadnieniem, ATAK na problem, po uprzednim przygotowaniu. Nie było to przypadkowe przypisanie nazwy, ponieważ całą opisaną procedurę rozwiązania zadania można by określić jako strategię podejścia do problemu w znaczeniu wojskowym. Strategią jest zatem pewien ogólny plan działania, w którym zawarte są inne plany (algorytmy, procedury), służący realizacji pewnego celu (zwycięstwo, sukces, rozwiązanie zadania).

W strategicznym myśleniu, czyli myśleniu opartym na całościowym podejściu do zadania, ważną rolę spełniają takie umiejętności, jak: planowanie, uwzględnianie różnych czynników (danych), wybór narzędzi, jasne określenie celu i kierunków działania, umiejętność podejmowania i weryfikowania decyzji dotyczących zasobów pozostających do dyspozycji. Uczeń budujący strategię nie skupia się na szczegółach procedur, tylko na samych procedurach i ich wzajemnych związkach, zależnościach i możliwościach współdziałania.

Uczeń rozwiązujący dostatecznie złożony problem staje się więc strategiem, dowódcą, menedżerem, który w zorganizowany sposób dąży do osiągnięcia celu. Każde podejście do problemu, zakończone zwycięstwem czy porażką, może być kształcące. Każdy problem staje się miniaturowym modelem działań długofalowych, które złożone są tych samych etapów, ale może być ich więcej i ich realizacja rozłożona jest na dłuższy czas.

W najnowszej Podstawie programowej słowa „strategie", „strategiczny" pojawiają się bardzo często zwykle w kontekście wypracowywania indywidualnych procedur. Zgodnie z jej zapisami uczeń powinien opracowywać własne strategie uczenia się. Ponieważ uczenie się jest długofalowym procesem opracowywania takich strategii, wymaga także myślenia długofalowego oraz wiąże się z zarządzaniem własną wiedzą, wiadomościami i umiejętnościami.

Pozycja stratega i jego perspektywa obejmuje także krytyczne podejście do dotychczasowych praktyk, rozwiązań czy wiedzy. Wymaga patrzenia „z lotu ptaka" na całą sytuację oraz uruchomienia racjonalnych procesów decyzyjnych. Wymaga też samodyscypliny i czujności oraz zdolności do podejmowania ryzyka i odporności na sytuacje trudne emocjonalnie.

Strateg myślący długofalowo wie, że jego wnioski i plany nie muszą być właściwe. Strategiczne decyzje podejmowane są często przy użyciu niepełnego zbioru nie zawsze dokładnych danych, często wynikają z szacowania, mają rangę przypuszczeń, które wymagają weryfikacji w praktyce, jednak bez nich wszelkie racjonalne działanie byłoby niemożliwe. Uczeń, który nie kształci swego strategicznego myślenia, działa chaotycznie, popełnia błędy, nie szuka nowych możliwości wyboru, wciąż traci z oczu cel działania, w efekcie więc nie rozwija się zgodnie z własnymi możliwościami i potrzebami. W rezultacie zanim jeszcze podejmie się działania, jest skazany na porażkę.

Od czego zacząć zatem rozwijanie myślenia długofalowego?

Na początek konieczne są rozmowy z uczniami o najbardziej podstawowych celach. Dlaczego uczęszczają do szkoły? Jeżeli sądzą, że tylko dlatego, bo tak zdecydowali rodzice lub władze oświatowe, warto ich wyprowadzić z błędu. Niewystarczająca jest także odpowiedź typu „żeby się nauczyć matematyki, polskiego albo liczyć, czytać, pisać…". Cele narzucone z zewnątrz warto skonfrontować z celami, które należy postawić sobie „od wewnątrz", indywidualnie albo wspólnie. Rzeczywiste założone cele szkolne, jeszcze raz sformułowane i przetłumaczone niejako na język dzieci, pomogą im określić swoje miejsce i rolę w długofalowej przygodzie, jaką jest uczenie się w szkole podstawowej. Chociaż realizowane w wymiarze indywidualnym, cele te będą wspólne, będą łączyć uczniów w zespół współpracowników. Warto wzmocnić te cele poprzez ich wypisanie w postaci przykładowych haseł (por. Podstawa…, 2017):

- Moim celem jest nauczenie się, jak się uczyć. Jeśli będę umiała się uczyć, będę mogła nauczyć się tego, czego będę potrzebowała w życiu (realizacja szerzej opisana w: Myślenie długofalowe i cele strategiczne a strategiczne planowanie).

- Chcę nauczyć się samodzielnego rozwiązywania zadań. Jeśli ktoś mi pomaga, to często rozwiązuje zadanie za mnie, a ja chcę być osobą samodzielną.

- Będę umiał stosować matematykę w życiu codziennym. Matematyka powinna mi się przydać. Uczy myślenia, wyciągania wniosków i niepopełniania błędów.

- Będę umiał posługiwać się językiem matematycznym. Ten język to precyzyjne narzędzie do rozwiązywania wielu problemów.

- Chcę przygotować się do startu w Olimpiadzie Matematycznej Juniorów, w której wezmę udział za 4 lata. Chcę dostać się do finału i uzyskać tytuł laureata.

- Chcę się nauczyć rozwiązywania zadań na dowodzenie. Zadania te świadczą o sporej wiedzy matematycznej i niewielu absolwentów liceów i techników sobie z nimi radzi.

Warto wzbogacać naszą materialną przestrzeń edukacyjną informacjami dotyczącymi długofalowych celów uczenia się, zarówno tych już podjętych do realizacji, jak i możliwych do podjęcia przez uczniów. Wskazane są plakaty i transparenty z odpowiednimi celami długofalowymi, które łatwo przywołać lub które będą nam przypominały o ich realizacji. Nie dla wszystkich uczniów jest oczywiste, że ich długofalowe cele związane ze szkołą związane są z efektami procesu uczenia się. Aby wzmocnić działanie tych informacji, użyjmy kalendarza do zapisywania terminów realizacji poszczególnych etapów naszych długofalowych projektów.

Warto także rozmawiać z uczniami o planach oraz o środkach, jakie mamy do dyspozycji, aby te plany realizować. Rozmawiając o tym, wprowadzamy do naszego wspólnego języka ważne pojęcia i nazwy, przede wszystkim opisujące kluczowe kompetencje, które chcemy rozwijać. Zmieniając nasz język komunikacji z uczniami, wywieramy nie tylko wpływ na ich język, ale też wywieramy znaczący wpływ na całą szkolną rzeczywistość. Zmieniając język często nawet nie dostrzegamy, że dawne, trudne do rozwiązania problemy przestają już nas prześladować, jakby rozwiązały się same, nowe zaś znajdują rozwiązania w naturalny sposób. Wprowadzanie takich zmian w języku nauczyciela, to osobny temat, w tym miejscu zaznaczamy go jako przykładowy cel strategiczny nauczania[1].

Myślenie długofalowe i cele strategiczne a strategiczne planowanie

Cele strategiczne wymagają strategicznego planowania. W przypadku uczniów szkół podstawowych proces realizacji poszczególnych etapów planu sporządzanego w ramach

[1] Na wstępie warto poddać refleksji te elementy używanego języka, które stanowią barierę w rozwiązywaniu problemów lub w ich identyfikowaniu.

myślenia długofalowego będzie jednocześnie procesem dochodzenia do zrozumienia, dlaczego jest to ważny proces. Nie należy więc wymagać od uczniów ani jego natychmiastowej akceptacji, ani też omówienia, czym jest sam cel i na czym ma polegać jego realizacja. Częste wracanie do wprowadzonych zagadnień, powtarzanie terminów realizacji, na których nam zależy, doprowadzi z czasem do uświadomienia sobie tych ważnych celów i do pełnej akceptacji zarówno celów, jak i ich znaczenia dla rozwoju ucznia, a także znaczenia samego myślenia długofalowego. Takie podejście ma znamiona podejścia systemowego, w którym działamy realizując z góry przyjęte etapy, od analizy sytuacji, poprzez określenie przeszkód, możliwości, sformułowanie planu i celów pośrednich oraz metod weryfikacji efektów naszych działań.

Cele długofalowe stawiamy sobie głównie po to, by ułatwić przełamanie pewnych wewnętrznych barier, które hamowały procesy rozwojowe, żeby zmodyfikować dotychczasowe, czasem nieuświadomione cele życiowe, żeby dostrzec nowe możliwości i skorzystać z nich. Istnienie celu stwarza istotne napięcie rozwojowe, pewien twórczy dysonans, który powinien wyzwolić wolę działania eliminującego tę dysharmonię między stanem obecnym a pożądanym. Cele te ukierunkowują nasze działania doraźne i krótkoterminowe, nadają naszej pracy misję. Ważne, żeby pracując mieć poczucie ogólnego, misyjnego celu tej pracy.

Wyznaczenie długofalowych celów strategicznych, wymuszające długofalowe myślenie o nich, planowanie i działanie, może przestawić wielu uczniów z niefrasobliwego funkcjonowania w ramach zaspokajania prostych potrzeb i zachęcić do ponoszenia pewnych wyrzeczeń koniecznych podczas uczenia się. Osoba kierująca się wytyczonymi godziwymi celami lepiej rozumie siebie i świat, a zatem efektywniej w tym świecie działa, osiągając kolejne cele dla swego dobra i dobra ogółu. Co równie ważne, realizując własne cele długoterminowe uczeń skupia się na własnych mocnych stronach, rozwija je czerpiąc zadowolenie z efektów pracy od etapu szkolnego poprzez kolejne etapy życia dorosłego. Przekonanie się do tej zasady i wdrożenie się w jej praktyczną realizację znacznie ułatwia zarówno nauczycielowi, jak i uczniom podejmowanie długofalowych działań i gwarantuje, że przyniosą one dobre efekty. To przekonanie trzeba świadomie budować.

Jedyną drogą podejmowania takich działań w przypadku dorosłych jest podejmowanie ich na własny rachunek, z własnej potrzeby, niejako „od wewnątrz". Narzucanie komuś z zewnątrz długofalowego myślenia strategicznego, ukierunkowanego w stronę konkretnych celów nie wydaje się korzystne. Zadaniem państwa i zadaniem szkoły jako placówki realizującej cele państwa, jest wytyczenie zakresu i ram realizacji długofalowych planów, jednak wybór indywidualnych dróg życiowych pozostawiony jest obywatelom.

W przypadku uczniów nie chodzi nam o to, by określali oni swoje długofalowe cele, lecz by konstruowali proste narzędzia, które, stale rozwijane i doskonalone, będą mogły zostać użyte w dorosłym życiu. To także nasz, pedagogiczny, długofalowy cel. Do nas należy opracować i zrealizować strategiczny plan działania wspierającego ucznia na II etapie edukacyjnym. Do uczniów zaś należą decyzje, czy będą myśleć długofalowo i jakie sobie cele wyznaczą, na ile świadomie, a na ile nieświadomie będą je realizować.

Ważne zalety rozwijania myślenia długofalowego nie dotyczą wyłącznie przeszłości. Perspektywa czasowa takiego myślenia nie skraca się wraz z upływem czasu realizacji długofalowych strategii czy projektów. Skraca się czas, jaki mamy jeszcze w perspektywie „do przodu", ale wydłuża czas, który jest „za nami". Myślenie zakorzenione w przeszłości pozwala docenić owoce pracy poszczególnych etapów, zobaczyć rozwój z perspektywy własnych osiągnięć, czyli „jaki byłem, jaki jestem, jaki będę". Uczeń, zaangażowany w dążenie do długoterminowych celów, kształci długoterminową pamięć, dzięki której przyswojony materiał nauczania może być odzyskiwany w razie potrzeby. Uczeń może na tym budować coś więcej niż zbiór procedur do rozwiązywania zadań: może budować system wiedzy.

Plan rozwijania długofalowego myślenia naszych uczniów

Stephen Covey (2006, 1998, 1997) w swojej poczytnej serii książek wymienia powody nieskuteczności naszych działań. Możemy też widzieć w nich przyczyny błędów i niepowodzeń naszych uczniów. Są to:

- podejście reaktywne – wątpienie w samego siebie oraz obarczanie winą innych;
- praca bez jasno sformułowanego celu;
- wykonywanie najpierw rzeczy pilnych;
- myślenie w kategoriach wygrana-przegrana;
- stawianie na pierwszym miejscu bycia rozumianym przez innych;
- szukanie kompromisu w przypadku braku możliwości zwycięstwa;
- lęk przed zmianami i odkładanie na bok doskonalenia się (Covey, 1997).

Symptomy znamionujące porażki pedagogiczne wynikające z działań, w których nie działamy we właściwy sposób widoczne są także w polskich (nie tylko amerykańskich) szkołach. Prawdopodobnie wystarczyłoby zatem zmienić poprzednie podpunkty na przeciwne, aby zacząć stwarzać odpowiednie podwaliny pod przyszłe szkolne sukcesy naszych uczniów. Zatem promować należy:

- podejście proaktywne – zdolność wyboru odpowiedniej reakcji, nieobarczanie winą innych;
- praca z jasno wytyczonymi (długofalowymi) celami;
- wykonywanie najpierw rzeczy ważnych (nieodkładanie na później, aż się staną pilne; walka z nawykiem prokrastynacji);
- myślenie w kategoriach wygrana-wygrana, zapewnienie jednakowej satysfakcji obu stronom konfliktu bez poczucia ustępowania;
- stawianie na pierwszym miejscu rozumienia innych, a potem bycia zrozumianym;
- niezadawalanie się kompromisami, w których każda strona jest częściowo rozczarowana rozwiązaniem problemu;
- odwagę w obliczu koniecznych zmian i ciągłe doskonalenie się.

Nasze planowanie powinno się zatem rozpocząć od analizy sytuacji, rozpoznania problemów, które uniemożliwiają osiąganie sukcesów zarówno nam, jak i uczniom. W rozpoznaniu warto uwzględnić rozpowszechnione nasze i uczniowskie zachowania o charakterze trwałych nawyków oraz ich wpływ na nasze decyzje. Czasem nawyki przechodzą w uzależnienia – świat pokus znacznie rozszerzył pole wpływów na nas i uczniów w ostatnich dekadach.

Poszukując symptomów uzależnień, warto zatem zwrócić uwagę, czy w realizacji naszych celów nie przeszkadzają nam następujące ich znamiona:

- oczekiwane przyjemne doznanie;
- zafiksowanie na wykonywanej czynności;
- poczucie własnej wartości, siły i kontroli, które mija po zaprzestaniu wykonywania czynności i szybko zmienia się w stany przeciwne, gdy czynność zostaje przerwana;
- poczucie zaostrzających się problemów różnego rodzaju (w tym z nauką);
- pogarszające się funkcjonowanie w społeczeństwie, osłabienie więzi (wg Covey, 1998).

Praca nad sobą i własnych charakterem zawsze była ważnym elementem wychowania i samowychowania. Dziś powoli praca ta staje się zadaniem pilnym, od którego nie możemy uciec, nie możemy też udawać, że go nie ma.

Warto porozmawiać z uczniami o ich długofalowych celach. Najpierw trzeba wyjaśnić, czym są te cele i dlaczego nazywamy je długofalowymi. Rozmowa o celach z 11–12-latkami wcale nie musi być jałowa. Obserwują oni świat dorosłych i zauważają, jak np. rodzice planują wyjazdy, wydatki itp. Zwykle duże zakupy planuje się z dużym wyprzedzeniem. Kluczowym pytaniem będzie, dlaczego ludzie stawiają sobie cele. Jedną z odpowiedzi jest ta, że cele ukierunkowują nasze myślenie i postępowanie, porządkują je i wyznaczają porządek rzeczy ważnych i mniej ważnych. Celem większości rodziców jest zadbać o dobre wykształcenie swoich dzieci. A jak same dzieci mogą odpowiedzieć na taki długofalowy cel dorosłych? Jakie analogiczne cele powinny i mogą sobie postawić dzieci w takiej sytuacji?

Co to znaczy dobre wykształcenie? Czego wymaga? Czy samo chodzenie na lekcje i odrabianie prac domowych wystarcza? Czego jeszcze potrzeba?

Zagadnieniom związanym z rozwijaniem osobistej efektywności poświęcimy ostatni rozdział tej książki. Teraz sygnalizujemy tylko, że rozwijanie długofalowego myślenia dzieci starszych i młodzieży możliwe jest tylko przy ich czynnej współpracy, jako skutecznych współpracowników, współtwórców własnego rozwoju. Aby ten cel osiągnąć, trzeba pomóc uczniom zneutralizować przeszkody stojące na drodze tego rozwoju. To samo dotyczy przeszkód stojących na naszej drodze. Jest ich wiele i są one różnorodne, ale bez odważnego rozpoznania i neutralizowania będziemy skazani na porażkę we wszelkich naszych działaniach, także tych krótkoterminowych i to już na samym początku. Nie ma nic gorszego jak porażka po pierwszym kroku. Takie porażki mogą nieodwracalnie zniechęcić nas do kolejnych prób.

Wzorując się na dobrze zorganizowanych przedsiębiorstwach, ustalmy więc wspólnie z uczniami, jaki jest nasz oczekiwany efekt końcowy. Jakich oczekujemy wyników i kiedy

będziemy się mogli przekonać, czy zostały osiągnięte. Zależy nam na wciągnięciu uczniów do współkierowania procesem uczenia się i wychowywania. Określenie wspólnych celów jest koniecznym etapem. Cele te powinny dotyczyć efektów uczenia się i nauczania, a także wychowywania i samowychowania.

Warto zastanowić się, jakimi technikami, metodami i strategiami działania można osiągnąć zamierzone długofalowe cele oraz jakie będą korzyści z ich osiągnięcia. Trzeba też wymienić konsekwencje w przypadku nieosiągnięcia celów. Szkolne regulaminy i statut podsuną propozycje, ale możemy też pomyśleć nad własnymi propozycjami. Dodatkowa nagroda, poza satysfakcją z osiągniętego celu, na pewno się przyda. Cele mogą wykraczać poza cele programowe przypisane matematyce, ale można też wpisać w nie cele ściśle związane z przedmiotem. Uczniowie mogą wyrażać swoje indywidualne pragnienia. Perspektywa roku szkolnego jest wystarczająca do formułowania celów długofalowych na poziomie klasy IV. Dostatecznie ogólnie sformułowane mogą być przedłużane na kolejne lata.

Załóżmy segregator z kartotekami dla poszczególnych uczniów. Archiwum będzie stale uzupełniane, a w przypadku rozrastania się go można będzie wprowadzić indywidualne portfolia. Uczniowie będą uzupełniać swoje teczki efektami swojej pracy nad osobistym rozwojem w ramach realizowanego planu. Cele wytyczone na początku rozłożą się na cele etapowe. Zindywidualizowane podejście pozwoli każdemu uczniowi rozwijać się w kierunku wyznaczonym przez własne zdolności bez konkurowania z innymi.

Początkowe ustalenia mają charakter umów zawieranych niejako uczeń-sam-ze-sobą w obecności świadków. Zapisane cele i oczekiwane efekty są ważnym miejscem, do którego będziemy wracać w toku zajęć. Dotychczas była to domena nauczyciela, który zarządzał zespołem uczniowskim, nakazywał, kontrolował, sprawdzał i nie był zadowolony z efektów. Chcemy relację nauczyciel – uczeń uczynić bardziej symetryczną. W nowoczesnych przedsiębiorstwach nie są już potrzebni niesamodzielni pracownicy, którzy nie podzielają misji swojej firmy, jej celów i zasad działania. Szkoła, chociaż nie jest dla uczniów firmą zatrudniającą, ma być etapem przygotowującym do pracy w takiej właśnie firmie i w takim społeczeństwie, w którym ludzie są godni zaufania i ufający, współpracujący i uczący się i w którym ustalają razem zasady współpracy i współżycia.

Oprócz wspólnej długofalowej wizji potrzebna jest także wspólna strategia rozwoju, dążenia do wytyczonych celów. Jeśli uczniowie spróbują wyobrazić sobie, jacy mają być za cztery lata lub za pięć, powinniśmy też zadać (przede wszystkim sobie) kolejne pytania:

1. **Jakimi strategiami musimy się posłużyć, aby osiągnąć cel?**

   Odpowiedź na to pytanie ma ścisły związek z odpowiedzią na pytanie 5. (wytyczne). Strategie związane są z pracą nad swoim potencjałem i ograniczeniami, osobistą efektywnością. Oparte są na systematycznej pracy i konsekwencji w przestrzeganiu zasad.

2. **Czy nasza szkoła sprzyja realizacji takich strategii?**

   Jesteśmy nauczycielami w szkole, w której pracują też inni nauczyciele, także uczący naszych uczniów. Nie zawsze ich cele długoterminowe pokrywają się z naszymi. Może się zdarzyć, że będą nawet z nimi w sprzeczności. Co wtedy?

3. **Czy ufam uczniom na tyle, by powierzyć im chociaż część odpowiedzialności za własne postępowanie?**

   Zaufanie uczniom nie oznacza pozostawienia ich całkowicie bez kontroli. Wyraźnie określone konsekwencje niedotrzymanych umów będą ramą ograniczającą pełną swobodę działania. Ufaj i rozliczaj – to jedna z naszych strategii.

4. **Jak zapewnić kontrolę i pożądane rezultaty?**

   Zindywidualizowana praca na lekcjach i stosowanie metod aktywizujących dają nauczycielowi więcej możliwości przebywania z uczniami w bezpośrednim kontakcie. Słuchanie wypowiedzi uczniów, doradzanie, czyli coaching, zapewnia zarówno systematyczny nadzór jak i stymuluje pracę ucznia, ukierunkowuje ją i wspomaga.

5. **Jakich wskazówek i wytycznych udzielić uczniom i jak egzekwować ich przestrzeganie?**

   Wskazówki powinny dotyczyć przede wszystkim metod uczenia się i pracy nad swoim charakterem. Jeszcze wrócimy do tego tematu, a w tym miejscu zaznaczmy, że główne ogólne wskazówki powinny dotyczyć systematycznej codziennej pracy nad zadaniami, roli nagradzania się różnymi przyjemnymi zajęciami, czyli pracy nad szkodliwymi nawykami prowadzącymi do uzależnień (np. od gier, portali, komunikatorów).

6. **Jak uczniowie mają rozliczać się z rezultatów swoich działań?**

   Szczegółowe ustalenia zależą od samych nauczycieli. Wiele też zależy od przyjętych metod pracy i systemów oceniania jej efektów. W celach długoterminowych zwracamy uwagę przede wszystkim na postępy ucznia, sukcesy indywidualne odnosimy do wcześniejszych dokonań tego ucznia. Nie porównujemy go z innymi. Chcemy dbać o wzmacnianie poczucia własnej wartości i wewnętrzną motywację do pracy.

W rozdziale tym nie będziemy przedstawiać pojedynczych sytuacji dydaktycznych. Aby opisać myślenie długofalowe, potrzebne jest zwrócenie uwagi na dłuższy horyzont czasowy, na opisy strategii, na zasady kierowania uczniami.

Pokażemy za to, w jaki sposób nauczyciel poprzez przykład własnego działania może oddziaływać na ucznia na dwóch płaszczyznach:

- uczeń wdraża się w proces tworzenia własnych długoterminowych projektów dzięki zapoznawaniu się z procedurami ich tworzenia i realizacji;
- uczeń realizuje własne cele długofalowe, dzięki zaangażowaniu w długoterminowy projekt dydaktyczny nauczyciela.

Jak rozwijać myślenie długofalowe – trzy przykłady projektów dydaktycznych

Przykład 1

Cel długofalowy:

Będę umiał stosować matematykę w życiu codziennym. Matematyka powinna mi się przydać. Uczy myślenia, wyciągania wniosków i niepopełniania błędów.

1. Na pierwszym etapie projektowania ustalamy cel długofalowy i odnajdujemy powody jego realizacji. Wszyscy uczestnicy wzbudzają pozytywne nastawienia do pracy i motywują się nawzajem do jej rozpoczęcia. Nie każdy musi wziąć w nim udział, ale liczymy, że będzie to projekt realizowany zespołowo.

   Pogadanki i dyskusje, burze mózgów i metaplany, stanowią obudowę metodyczną zajęć poświęconych postawieniu długofalowych celów uczenia się. Razem z uczniami możemy poszukać zastosowań rozumowania matematycznego w życiu codziennym. Zapisujmy przykłady sytuacji oraz pomysły na zajęcia i zadania, w których widoczne będą umiejętności matematyczne. W ten sposób nie tyle będziemy szukać zastosowania w życiu tego, czego się uczymy w szkole, ile będziemy wprowadzać na lekcje matematyki zagadnienia z życia pozaszkolnego. Niezwykle ważne jest, że pomysły pochodzą od uczniów.

   Pomysły mogą dotyczyć następujących sytuacji (należy wybrać z nich kilka i uporządkować zgodnie z rozkładem materiału lub dopisać własne tematy):

   - kupowanie biletów autobusowych w automacie, kupowanie biletów zbiorowych, opłacanie miejsc parkingowych, poszukiwanie optymalnych kosztów parkowania, opłacanie wycieczek i szkolnych imprez z funduszy uzyskiwanych ze składek uczniowskich;
   - powiększanie kapitału poprzez oszczędzanie na lokatach lub w inny sposób (zbiórki, kiermasze, udział w konkursach);
   - działalność charytatywna – kwestowanie, inne rodzaje zbiórek, tworzenie budżetów na cele niezwiązane z własnymi doraźnymi potrzebami, działalność na rzecz

młodszych członków szkolnej wspólnoty, opieka, pomoc w świetlicy, zabawy edukacyjne;
- zbieranie i opracowywanie danych statystycznych, badania ankietowe, pomiary;
- obliczenia kalendarzowe, tworzenie kalendarza planów i efektów projektów długofalowych; zadania o rozkładach jazdy autobusów, pociągów lub tramwajów w zależności od zwykłych i świątecznych dni tygodnia;
- orientacja w terenie na podstawie map i planów miejscowości, dzielnic i dużych miast;
- zagadnienia ekonomiczne dużych i małych firm oraz prywatnych przedsięwzięć;
- porównywanie danych na temat różnych dziedzin gospodarczych na podstawie rocznika statystycznego oraz danych zebranych w lokalnych urzędach, np. na temat zatrudnienia czy kosztów utrzymania;
- optymalne kształty pudełek i pojemników różnej wielkości, porównywanie objętości, pakowanie produktów i prezentów;
- matematyka w sporcie, w skokach narciarskich, sposób przydzielania punktów skoczkom, punkty w triathlonie i innych dyscyplinach sportowych, pomiar czasu, pomiar innych parametrów, wymiary boisk sportowych, rekordy świata i kraju;
- matematyka w żeglarstwie, azymuty, kąty widzenia, współrzędne geograficzne, mapy, pomiary odległości w terenie bez użycia dalmierzy;
- rozety i witraże, symetrie i proporcje w architekturze;
- drzewa genealogiczne.

2. Na tym etapie działamy bez udziału uczniów. Jego celem jest analiza sytuacji początkowej, warunków uczenia się oraz możliwości uczniów.

3. Jednocześnie z drugim etapem warto wyszukiwać odpowiednie zadania i gromadzić pomoce dydaktyczne, które mogą służyć podczas realizacji celów. W przestrzeni edukacyjnej mogą pojawiać się różne przedmioty i urządzenia, znane uczniom z codziennego życia poza szkołą i odpowiadające tematom wskazanym na pierwszym etapie. Każdy z tematów powinniśmy umieścić w kalendarzu po to, by uczniowie mogli się przygotować odpowiednio wcześniej do jego realizacji. Dla każdego obranego celu pośredniego konieczne będą wycieczki poza szkołę. Trzeba je zatem dobrze przygotować, obudowując metodycznie, przydzielając role i zadania poszczególnym uczniom.

   Przed każdą lekcją lub cyklem lekcji poświęconych zagadnieniom „życie codzienne a matematyka” przygotowujemy zadania do wykonania i do rozwiązania oraz opisujemy efekty pracy uczniów, żebyśmy mogli je potem zweryfikować. Tradycyjne wycieczki szkolne, jeśli nie towarzyszą im szczegółowe cele edukacyjne, są traktowane przez uczniów jak czas wolny od nauki, czas zabawy lub co najwyżej czas gromadzenia doświadczeń. Uczniowie powinni więc nauczyć się, że każde tego typu doświadczenie, nie tylko w szkole, zasługuje na refleksję po powrocie do szkoły lub domu, trzeba je opisać i wyciągnąć wnioski dotyczące tego, co się wydarzyło oraz ewentualnych kontynuacji. Odpowiednio ustawione cele ukierunkowują realizację zadań, ich brak wytrąca uczniów z trybu zadaniowego – każdy określa cele na swój sposób, dowolnie i bez związku z jakimkolwiek celem dydaktycznym. Zależy nam, żeby każdą sytuację wykorzystać do

racjonalnego rozumowania, bo wtedy uczeń przekonuje się, że nie jest ono wyłącznie domeną zadań z podręcznika.

4. O terminach realizacji poszczególnych tematów przypomina nam kalendarz. Dbamy o to, by zajęcia odbywały się terminowo, a gdy z ważnych powodów nie mogą odbyć się w przypisanym im terminie, przesuwamy je. Konsekwencja w realizacji to ważny aspekt wychowawczy projektu. Zajęcia mogą trwać więcej niż 45 minut. Mogą tworzyć bloki, które wplatamy w rozkład materiału. Starajmy się, aby każde zajęcia dostarczały uczniom pewność, że zdobywają konkretne umiejętności oraz wiedzę, którą można się wykazać. Nauczyciel organizuje proces kształcenia i wskazuje osiągnięcia stanowiące przedmiot kontroli. Uczniowie wiedzą, że będą poddani testowi. Wiedzą też, że na bieżąco są obserwowani i dyskretnie kontrolowani. Zarówno plan lekcji, jak i sposób oceny efektów uczenia się są podane do wiadomości uczniów.

5. Jeżeli są cele, musi być kontrola i ocena, czy cele zostały osiągnięte. Ułożenie dobrego testu jest miernikiem projektu. W przypadku projektów długoterminowych ocena powinna mieć charakter kształtujący. Uczniowie znajdują się stale na etapie formowania i doskonalenia. Powinni mieć szansę poprawy swoich osiągnięć w ramach pracy dodatkowej. W przypadku tematu związanego z praktyką pozaszkolną warto użyć w teście pytań dotyczących praktycznych celów wykonawczych, nie zaś celów typowo matematycznych lub celów, których efekty są tymczasowymi śladami w pamięci krótkoterminowej. Kształtująca ocena osiągnięć jednego cyklu zajęć może przejść w oceną podsumowującą na kolejnym etapie. Nawiązywanie do poprzednich osiągnięć jest ważną techniką utrwalania wiedzy ucznia.

   W naszym projekcie jako strategię nauczania przyjęliśmy wyjście od codziennych doświadczeń, powtórzonych w ramach wyprawy do miejsc, w których można je zdobywać, następnie opracowanie teoretyczne zebranych informacji, danych oraz sformułowanie problemów. Na kolejnym etapie mamy rozwiązywanie problemów przez uczniów w matematycznych modelach (używają abstrakcyjnych symboli), a na zakończenie uczniowie wracają do sytuacji codziennej, z której wyszliśmy i którą teraz rozumieją głębiej. Łatwiej też im sprostać wyzwaniom, które stawia przed nimi.

   Świadomość przyjętej strategii jest koniecznym warunkiem realizacji długofalowych celów nauczania. Przede wszystkim dotyczy ona nauczyciela, ale z czasem będzie interesująca także dla uczniów.

6. Należy zadbać o materialne efekty uczenia się. Możemy je wpisać do zbioru pomocy dydaktycznych. Jedne będą miały dużą wartość dydaktyczną, inne będą przedstawiały dowód realizacji zajęć. Zależy nam, aby większość zebranych dokumentów i eksponatów (kupony promocyjne, bilety, talony, rachunki, zdjęcia, opakowania) mogła być wykorzystana ponownie podczas rozwiązywania zadań. Potrzebujemy przestrzeni na gromadzenie tych materiałów tak, by łatwo były dostępne nie tylko dla nauczycieli. Uczniowie zdobędą tu cenne umiejętności dotyczące gromadzenia dokumentacji.

Pomoce dydaktyczne także warto nadal udoskonalać. Ich powstawanie przy okazji realizacji projektów może być jawnym celem długoterminowym nauczyciela.

7. Kontrola zbierająca, czyli podsumowanie efektów kształcenia może polegać na ocenie dorobku zebranych pomocy, ale przede wszystkim powinno dotyczyć realizacji celu głównego, jaki sobie postawiliśmy na początku projektu. Potrzebny będzie test sprawdzający, do którego uczniowie muszą się przygotować, np. poprzez powtórkę testów kształtujących, które przechodzili wcześniej. Warto wprowadzić szczegółowe cele zarówno związane zarówno z umiejętnościami wykonawczymi (obsługa maszyny do kupowania biletów lub parkomatu, odczytywanie informacji z rozkładu jazdy pociągów), jak i umiejętności z zakresu wymagań stricte matematycznych. Tak zróżnicowany test kontrolny wymaga też zróżnicowanych warunków jego prowadzenia (część praktyczna powinna odbyć się na zewnątrz szkoły).

Przykład 2

Cel długofalowy:

Chcę przygotować się do startu w Olimpiadzie Matematycznej Juniorów, w której wezmę udział za 3 lata. Chcę się dostać do finału i uzyskać tytuł laureata.

Ten projekt nie będzie dotyczył dużej grupy uczniów jednej klasy, lecz stosunkowo niewielkiej grupy uczniów różnych klas niekoniecznie jednego poziomu. Na tym będzie polegała jego zasadnicza różnica pomiędzy tym projektem a poprzednim. Pozostałe etapy pozostają bez zmian.

Informacje i hasła związane z realizacją długofalowego projektu powinny być umieszczone w miejscu dostępnym przede wszystkim dla zainteresowanych, ale także dla osób, które być może zechcą wciągnąć się w pracę grupy w trakcie realizacji. Mogą to zrobić w zasadzie na dowolnym etapie. Będą mogły doświadczyć różnicy w poziomie przygotowania i efektach.

1. **Spotkania organizacyjne**

   Na pierwszym etapie dzielimy się informacjami, które mają uczniowie na temat Olimpiady oraz powodów, dla których chcą wziąć w niej udział. Dobrze byłoby przygotować przykładowe zadania z eliminacji oraz ich rozwiązania. Tu także należy zadbać o pozytywne nastawienie. Tego typu projekt rodzi motywację wewnętrzną niejako na samym początku, ponieważ o ile udział w szkolnych projektach jest obowiązkowy, w tym przypadku uczniowie decydują się na udział w nim całkowicie dobrowolnie. Są więc gotowi ponosić pewne wyrzeczenia związane z udziałem oraz być może oczekują dodatkowych nagród lub ulg. Aby dobrze zrozumieć cele i zakres wymagań, należy je dokładnie omówić z uczniami.

2. Planowanie pracy

Organizacja pracy i materiały potrzebne do dobrego przygotowania mają związek z wiekiem, poziomem matematycznych umiejętności oraz czasem, jaki przeznaczamy na realizację projektu. Zadania na poszczególne etapy można tak zaplanować, żeby efektywny, czyli zakończony założonym sukcesem udział w Olimpiadzie (dojście do finału) wypadł w ostatnim roku nauki w szkole podstawowej, a zatem w pierwszym roku celem jest wziąć udział w zawodach 1 stopnia, w drugim zakwalifikować się do zawodów 2 i 3 stopnia, w trzecim – odnieść sukces w zawodach trzeciego stopnia.

Jako pomoce dydaktyczne gromadzimy zbiory zadań rekomendowane przez organizatorów Olimpiady, gromadzimy też zadania z lat wcześniejszych, a także czasopismo „Kwadrat” dostępne na stronie internetowej Olimpiady.

3. Ustalanie zasad pracy z uczniem

Dla uczniów, którzy biorą udział w tym długofalowym projekcie, olimpijczyków, jesteśmy trenerami, którzy przygotowują ich do zawodów. Wychodzimy z roli tradycyjnego nauczyciela i wchodzimy w rolę coacha, którego zadaniem jest przedstawić zasady dobrego treningu. Będą one dotyczyły systematycznej pracy, ćwiczeń w odpowiednich warunkach i odpowiednim czasie. Ogólna strategia związana będzie ze stopniowaniem trudności, czyli od analizy rozwiązań zadań konkursowych do samodzielnego rozwiązywania zadań łatwych, a następnie coraz trudniejszych, aż do nadmiernie trudnych, które należy odłożyć na później.

Na pierwszych z tych trzech etapów zadania może omawiać nauczyciel, ale lepiej, jeśli uczniowie sami zapoznają się z wzorcowymi rozwiązaniami, gdyż wtedy sami będą mogli zwrócić uwagę na przejścia sprawiające szczególną trudność. Wtedy mogą poprosić nas o pomoc.

W takich sytuacjach warto zwracać uwagę uczniom na precyzyjne zadawanie pytań i uszczegóławianie ich treści (nie należy zadawać pytań typu „o co tu chodzi?”). Nie należy też komunikować swojej bezradności w obliczu trudności („ja nic nie rozumiem”, „niech mi pani to wytłumaczy”).

Naszym ukrytym lub drugoplanowym celem projektu jest kształtowanie postaw samodzielności i przedsiębiorczości w rozwiązywaniu problemów.

Na pierwszych etapach rozłożonego w czasie projektu należy korzystać z materiałów niezwiązanych bezpośrednio z Olimpiadą. Zadania olimpijskie warto zostawić na później, kiedy uczniowie nabiorą wprawy w stosowaniu podejść i strategii typowych dla zadań konkursowych.

4. Próbne zawody

Zanim uczniowie przystąpią oficjalnie do swojej pierwszej edycji Olimpiady, zróbmy im próbne zawody 1 stopnia. Rozwiązania zadań można omawiać wspólnie, wskazując co robić, a czego nie robić podczas prawdziwego konkursu.

Projekt może zatem toczyć się wielotorowo:

- uczenie się rozwiązywania ciekawych zadań matematycznych, w tym zadań na dowodzenie;
- uczenie się sposobów redagowania rozwiązań.

Pierwszy przypadek rozkłada się na zadania otwarte i zamknięte.

W harmonogramie projektu powinny pojawić się daty oraz minimalne liczby rozwiązanych samodzielnie i przeanalizowanych rozwiązań zadań olimpijskich. Minima powinny być w zasięgu możliwości uczniów i powinny rosnąć z etapu przygotowań na etap.

5. Dodatkowe testy

Zredagowane w zeszycie rozwiązania powinny być przedstawiane do kontroli i oceny przez nauczyciela. Ocena powinna mieć oczywiście charakter kształtujący. Dodatkowe testy osiągnięć uczniów powinny dotyczyć umiejętności związanych z rozwiązaniem już omówionych zadań lub zadań lekko zmodyfikowanych. W teście takim powinno się też znaleźć zadanie o podwyższonym stopniu trudności, z kolejnego etapu. W materiałach konkursowych łatwo odróżnić zadania wymagające więcej umiejętności od innych.

6. Aktywność olimpijczyków

Oprócz wspomnianych zeszytów, w których olimpijczycy zapisują rozwiązania zadań oraz użyteczne twierdzenia i strategie często pojawiające się w rozwiązaniach, warto przygotowywać inne jeszcze dokumenty i pomoce. Każdy uczeń może mieć swoją teczkę prac, testów i opracowań związanych z przygotowaniami. Olimpijczycy mogą prowadzić zajęcia dla swoich koleżanek i kolegów, także z młodszych klas. Ich autorstwa może być szkolna gazetka zawierająca nie tylko informacje o celach projektu i o konkursie, ale też zadania dla innych uczniów. Mogą oni rozwiązywać je i przynosić do oceny. Zadania te mogą być materiałem do testu szkolnego konkursu matematycznego. Termin tego konkursu można wcześniej przewidzieć i wpisać do kalendarza imprez szkolnych i naszego długofalowego projektu.

7. Finał projektu

Nie ma bardziej obiektywnej kontroli jakości efektów projektu jak udział w oficjalnym konkursie olimpijskim. Jesteśmy pewni, że zrobiliśmy wszystko, co należało, zadbaliśmy o formę intelektualną i emocjonalną naszych olimpijczyków, którzy systematycznie

i z dużym poświęceniem rozwijali swoje kompetencje w zakresie rozwiązywania trudnych zadań matematycznych. Przećwiczyli reguły zawodów, biorąc w nich udział dwukrotnie, a teraz pora na finały w podwójnym znaczeniu: finał projektu i finał Olimpiady.

Cele długoterminowe mogą dotyczyć szczególnie trudnych zagadnień. Poniżej przykład jednego z nich. Skutki stosowania wyłącznie strategii krótkoterminowych widoczne są w raportach egzaminów maturalnych, z których wynika, że zadania tego typu rozwiązywana są przez niewielki procent absolwentów liceów i techników. Można zaryzykować stwierdzenie, że podejście długofalowe znacznie polepszyłoby te wyniki.

Przykład 3

Cel długofalowy:

Chcę się nauczyć rozwiązywania zadań na dowodzenie. Zadania te świadczą o sporej wiedzy matematycznej i niewielu absolwentów liceów i techników radzi sobie z nimi[2].

1. Ustalenie priorytetów

W Podstawie programowej znajdziemy dostateczne argumenty za podjęciem długofalowych działań w tym celu: „Zadania na dowodzenie stanowią ważny element wykształcenia matematycznego. Uczeń powinien dowiedzieć się, że w twierdzeniach zaczynających się od słów „wykaż, że dla każdego…” podawanie wielu przykładów nie jest dowodem, a podanie jednego kontrprzykładu świadczy o tym, że stwierdzenie nie jest prawdziwe. Nie oznacza to, że uczeń nie powinien szukać przykładów bądź kontrprzykładów. Często takie poszukiwanie i sprawdzanie prawdziwości tezy dla konkretnych przypadków pozwala uczniowi zrozumieć postawiony problem, a następnie podać ogólne rozumowanie. W szkole podstawowej zadania na dowodzenie powinny być proste (w przypadku zdolnych uczniów można rozszerzyć stopień trudności). Oznacza to, że np. do dowodu zadania z geometrii powinno wystarczyć obliczanie kątów (z wykorzystaniem równości kątów wierzchołkowych, odpowiadających i naprzemianległych, twierdzenia o sumie kątów trójkąta oraz twierdzenia o kątach przy podstawie trójkąta równoramiennego), użycie cech przystawania trójkątów do uzasadnienia przystawania jednej dostrzeżonej pary trójkątów przystających oraz wyciągnięcie wniosków z tej własności.

[2] Sprawozdanie z egzaminu maturalnego Matematyka, CKE, 2017: „Do zadań, które sprawiają maturzystom najwięcej trudności, należą te wymagające uzasadnienia prawdziwości twierdzenia lub własności obiektów matematycznych, szczególnie z zakresu geometrii. Zadania ze sformułowaniem »uzasadnij, że« bądź »wykaż, że« są bardzo często pomijane. W przypadku podejmowania próby rozwiązania częstym błędem jest ograniczenie się do sprawdzenia prawdziwości wzoru lub tezy twierdzenia jedynie w konkretnym przypadku albo pomijanie istotnej części rozumowania lub zapisywanie sformułowania w stylu: »co wynika ze zmierzenia kontomierzem« (sic!) bez jakichkolwiek komentarzy w kluczowych miejscach przedstawianego uzasadnienia. Zdający powinni mieć świadomość, że stosowanie wyżej wspomnianych zabiegów nie przyczyni się do poprawienia wyniku egzaminu”.

W projekcie tym warto też mieć za sobą uczniów, którzy doceniliby doniosłość rozumowań opartych na wyciąganiu wniosków z jasno określonych przesłanek. Czyż nie powinno ich dziwić, że podstawowa umiejętność należąca do matematycznego rzemiosła nie jest opanowana w takim stopniu, by być użytecznym narzędziem w rozwiązywaniu zadań maturalnych? Zanim więc powstanie książka pt. „Jak nauczyć dzieci sztuki dowodzenia twierdzeń" możemy przymierzyć się do długofalowego projektu dydaktycznego o celu sprecyzowanym wcześniej.

Zapisy Podstawy programowej świadczą, że Ministerstwo Edukacji Narodowej zamierza stawić czoła problemowi, przestawiając akcenty wymagań w kierunku zadań na dowodzenie już na II etapie edukacyjnym.

Wielu uczniów liceów na widok poleceń typu wykaż, uzasadnij, udowodnij, rezygnują z rozwiązania. Odruch ucieczki świadczy, że właśnie spotkali się z sytuacją dla nich tak nową, że wolą zrezygnować z rozwiązywania zadania niż się z nim zmierzyć. To jeszcze jeden dowód na potwierdzenie tezy, że zadania na dowodzenie pojawiają się w programach szkolnych o wiele za późno i bez odpowiedniego przygotowania. Nikt nie pomyślał o tym długofalowo.

Zanim więc uczeń spotka się z zadaniem na dowodzenie w postaci zadania typu „Udowodnij, że pierwiastek z 2 jest liczbą niewymierna" powinien spotykać się często z zadaniem innych typów, podobnych, ale dużo łatwiejszych, np. „Uzasadnij, że jeżeli odjemną i odjemnik zmniejszę o dwa, to różnica się nie zmieni". Lub jeszcze prostsze: „Uzasadnij, że jeżeli miałem 6 cukierków, a teraz mam 4, to brakuje mi dwóch".

Uczniowie powinni od najwcześniejszych lat borykania się z zadaniami nabierać przekonania, że dowodzenie i uzasadnianie jest najważniejszą, fundamentalną cechą rozumowania matematycznego. To ono jest podstawą wszystkiego: krytycznego rozumowania, budowania strategii, wyszukiwania i poprawiania błędów, myślenia przyczynowo-skutkowego. To jest jedyne w zasadzie kryterium opanowania wiedzy matematycznej.

Na czym polega i skąd się bierze pasja odkrywania prawdy matematycznej? Przyjmijmy, że jej istota nie leży w symbolicznej strukturze dowodu danego twierdzenia, lecz w samopoczuciu dowodzącego. Wydaje się, że nie można nauczyć się matematyki bez tego pobudzającego motywację, niezależnego od zewnętrznych czynników, efektu procesu uczenia się, jakim jest dojmujące wrażenie dotknięcia istoty, prawdy, czegoś nieuchwytnego, konkretnego. Poczucie to nazywane jest w literaturze olśnieniem, efektem AHA: Rozumiem, Widzę całość, Dostrzegam regularność, Wszystko jasne.

Uczniowie, którzy potrafią rozwiązywać zadania na dowodzenie, radzą sobie świetnie z pozostałymi zadaniami, a zatem warto włożyć trochę wysiłku, aby się przygotować do ich rozwiązywania.

Warto przyjrzeć się zatem:

- przyczynom niechęci uczniów do zadań na dowodzenie;
- sposobom na pokonanie trudności w prowadzeniu dowodów;
- klasyfikacji zadań na dowodzenie i trudnościom związanych z ich rozwiązywaniem;
- przykładom prostych dowodów dla zniechęconych oraz strategiom wybawiającym z opresji.

2. Wyodrębnienie etapów nauki

Przy zbieraniu materiałów będziemy musieli głównie liczyć na siebie. W dawnych sprawdzianach po szóstej klasie znajdziemy nieliczne zadania, w których dostrzeżemy ważne kroki w kierunku kształcenia dziecięcego dowodzenia. Zadania te po dwóch wystąpieniach zostały zaniechane, ale warto je wykorzystać do naszych celów i zbudować podobne do poniższych:

> Asia uwielbia godzinami oglądać telewizję. Któregoś dnia jej mama straciła cierpliwość.
> – Asiu, jak możesz! Już trzy godziny siedzisz przed telewizorem.
> – Ależ mamo, to tylko 10 procent mojego wolnego czasu dzisiaj.
> Uzasadnij, że Asia się pomyliła[3].

Drugie zadanie z wyraźnym akcentem na uzasadnianie ukazało się w sprawdzianie w kolejnym roku, 2004.

> W piekarni były sprzedawane tylko całe bochenki chleba. Bochenek waży 0,8 kg. Piekarz powiedział, że sprzedano 250 kg chleba. Zapisz obliczenia świadczące o tym, że piekarz nie podał dokładnej wagi sprzedanego chleba[4].

W obu zadaniach sprawdzianu należało skorzystać z niewyćwiczonego na lekcjach rozumowania nie wprost. Tego typu rozumowanie wydaje się dość naturalne, a mimo to nie jest często używane i proponowane nawet w podręcznikach do liceów. Nie będzie naturalne dopóty, dopóki nie zostanie zaakceptowana zasada:

> W matematyce nie tyle chodzi o dojście do pewnego wyniku wytyczoną i wyćwiczoną drogą, ile o przekonanie, a więc uzasadnienie, że otrzymany wynik jest właśnie tym, o który chodziło w zadaniu.

[3] Zadanie okazało się najtrudniejsze w teście z roku 2003. Rozwiązało je 25% szóstoklasistów. Frakcja opuszczeń wyniosła 20%.

[4] Rozwiązywalność tego zadania była najniższa dla całego arkusza i wyniosła 26%.

Naukę dowodzenia twierdzeń można by zatem rozpisać długofalowo na następujące etapy:

a) Prowadzenie rozumowania składającego się z niewielkiej liczby kroków. Na tym etapie uczniowie rozwiązywaliby zwykłe zadania tekstowe, zwracając uwagę w zapisie rozwiązania na przechodzenie od jednych informacji do kolejnych. W zadaniach tekstowych uczniowie mogliby mieć także podaną odpowiedź, którą od razu, bez zaglądania na koniec podręcznika lub zbioru zadań, mogliby skonfrontować ze swoim rozwiązaniem. Pod koniec etapu przeformułowywalibyśmy treści zadań tekstowych z tradycyjnej formuły na „Udowodnij, że rozwiązaniem zadania jest…".

   Przykładowo: Tradycyjne zadanie dla ucznia IV klasy: Oblicz pole kwadratu o obwodzie 24 zastępujemy zadaniem: Uzasadnij, że pole kwadratu o obwodzie 24 wynosi 36.

   Pomysł polega na tym, żeby schematyczne zadania obliczeniowe traktować jako pewien istotny etap na drodze do realizacji naszego celu i będziemy je często przekształcać w zadania wymagające postawy przekonywania o słuszności drogi, czyli w zadania na dowodzenie/uzasadnianie.

   Innym zabiegiem na tym etapie byłoby przetwarzanie zadań na dowodzenie w zadaniach na obliczanie. Uczniowie tworzyliby własne zadania obliczeniowe z zadań na dowodzenie. Przykładowo, z twierdzenia o kątach wierzchołkowych można utworzyć zadanie: oblicz miarę jednego z kątów wierzchołkowych, jeśli ich suma wynosi 1120.

   Uczniowie mogliby sami stawiać przypuszczenia, nawet dość karkołomne, jak sprawdzać na wielu przykładach, czy jest ono prawdziwe (dla wielu z nich będzie to twierdzenie – intuicyjnie – prawdziwe, chociaż nie jest).

   Przyglądanie się przypadkom i wyciąganie z nich wniosków można traktować jako ważny krok w kierunku dowodzenia twierdzeń (por. Patyczkowa algebra w Zeszycie 1 Zestawu 5), jako krok do rozumowania dedukcyjnego. Szukanie kontrprzykładów.

b) Zastosowanie twierdzenia, które nie występuje w treści zadania. Najczęstszymi twierdzeniami, które nie występują w treściach zadań i które uczniowie z łatwością przywołują w trakcie rozwiązywania są rozmaite wzory, w tym wzory na pola i objętości figur. Inne wzory także powinny być użyteczne, np. wzory dotyczące praw działań (prawo rozdzielności, twierdzenia o potęgowaniu). W zadaniach tego etapu uczniowie prowadziliby rozumowanie typu „udowodnij" analogiczne do zadań z etapu 1. z tą różnicą, że teraz zaczynają od podjęcia decyzji, z jakiego twierdzenia (wzoru) pomocniczego korzystają, prowadząc swoje rozumowanie.

c) Ten etap i poprzedni są bardzo ważne. Uczniowie nie rozwiązują na nich typowych zadań na dowodzenie. Oprócz tego, że przygotowują się do przyjęcia nowych wyzwań, utrwalają dobre nawyki rozumowania przyczynowo-skutkowego, zachodzi bowiem

obawa, że wielu z nich może rozwiązywać zadania nie wymagające dowodzenia wprost w sposób schematyczny, wyłącznie dzięki łączeniu elementów rozwiązań znajomych zadań. Takie strategie mogą przynosić dobre efekty doraźne, lecz są całkowicie bezużyteczne w zadaniach, w których nie da się uniknąć wnioskowania z przesłanek.

d) Analizowanie i interpretowanie wyników rozumowania. Uczeń, który potrafi już rozumować, czyli odróżniać założenia od wniosków oraz prowadzić poprawne lub błędne wnioskowania na podstawie założeń, jest przygotowany do tego, by móc analizować i interpretować wyniki rozumowania. Cenne są tu studia przypadków. Na podstawie gotowych rozwiązań własnych lub innych uczniów, poprawnych albo błędnych, uczeń trenuje interpretacje wyników, czyli sprawdzanie, czy otrzymane rozwiązanie spełnia warunki zadania oraz czy otrzymane wnioski nie prowadzą do kolejnych uogólnień, czyli do nowych tez.

e) Materiałami mogą być tu zarówno zapisane dowody twierdzeń, jak i rozwiązania dowolnych zadań tekstowych. W niektórych z nich poprzez odpowiednią parametryzację danych mona dostrzec ciekawe prawidłowości, które można sformułować w postaci twierdzenia. Sztuka redagowania dowodów to w zasadzie najwyższy etap, ale w naszym przypadku cel jest nieco inny.

f) Przeprowadzenie dowodu twierdzenia zgodnego z wymaganiami podstawy programowej. Trening uzasadnień fałszywości stwierdzeń przez wskazanie kontrprzykładów i fakultatywnie wyprowadzane dowody nie wprost zwłaszcza w twierdzeniach zawierających nierówności. Przykładowo:

Twierdzenie. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b i przeciwprostokątnej długości c zachodzi nierówność: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}>1$.

Dowód (nie wprost):

Załóżmy, że $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\leq 1$, wtedy mamy, że $\frac{a+b}{c}\leq 1$, skąd wynika, że suma $a+b$ jest mniejsza od c, co jest sprzeczne z twierdzeniem o sumie długości boków trójkąta, zatem otrzymana sprzeczność wniosku z założeniem twierdzenia świadczy o tym, że nierówność w tezie twierdzenia jest prawdziwa. CND

3. Styl pracy z uczniem

Opisane wcześniej etapy długoterminowego projektu realizujemy dowolnymi metodami wyzwalającymi aktywność uczniów. Uczniowie mają do dyspozycji pomoce dydaktyczne, plany i strategie postępowania z zadaniami. Stopniowo oswajają się z nimi i z pytaniami, które mogą być dla nich nowe: dlaczego tak uważasz? Czy takie uzasadnienie wystarczy? Nie przyjmujemy odpowiedzi, w których uczniowie powołują się na intuicję lub autorytety

(„mama mi tak tłumaczyła”). Pokazujemy, że w matematyce nie można odwoływać się do wcześniejszych doświadczeń, tylko do dobrze opisanych przesłanek, że w matematyce wystarczy znać podstawowe schematy wiedzy i umieć wyprowadzać z nich wnioski, a można sprawnie rozwiązać prawie każde zadanie.

4. Tempo pracy

Konieczność wyznaczania terminów może być nieco krępująca. Trzeba przewidzieć, w jakim tempie uczniowie będą robić postępy. Wiadomo, że jedni będą uczyć się szybciej od innych. Dlatego też, skoro nasz projekt jest długofalowy, możemy sobie pozwolić na rozciągnięcie go w czasie na cały pięcioletni okres kształcenia na II etapie i planować z pewnym marginesem. Zadania dostosowujemy do aktualnie wprowadzanego materiału. Decydujemy, ile godzin tygodniowo zajmiemy wyłącznie zadaniami na dowodzenie, uzasadnianie i przekonywanie innych. Zależy to od indywidualnych możliwości i potrzeb uczniów. Nawet jeżeli będzie to czwarta część czasu, wkład ten będzie znaczący w perspektywie pięciu lat.

5. Stopniowanie trudności

Testy kształtujące z zadań na dowodzenie będą pojawiać się w wyznaczonych terminach. Podobnie jak w innych projektach, będziemy pamiętać o zadaniach z poprzedniego etapu oraz o zadaniach wyprzedzających i ukierunkowujących dalszą pracę. Oczekujemy, że wraz z rozwojem projektu coraz więcej uczniów będzie rozwiązywać coraz trudniejsze zadania, które dotąd nie pojawiały się na zajęciach.

6. Eksponowanie efektów pracy

Dowody formalne z przejrzystymi opisami i wyraźnym podziałem na części: „założenia”, „teza”, „dowód”, „co należało dowieść” oraz z tokiem rozumowania dowodowego powinny być od czasu do czasu eksponowane na ścianach klasy (plakaty). Uczniowie przyzwyczajają się do stosowania formy (w tym przypadku ogólnie przyjętego sposobu zapisywania dowodów twierdzeń) także jako swoistego narzędzia porządkującego tok myślenia i dzięki temu ułatwiającego prowadzenie rozumowania.

Oprócz „pozytywnych” przykładów rozwiązań zadań warto także eksponować podstawowe zasady rozwiązywania zadań na dowodzenie: **nie wolno wyprowadzać wniosków z tezy twierdzenia**. A także zasady prowadzenia dowodów nie wprost. Realizując projekt zdamy sobie sprawę, jak wiele umiejętności wymaga jednak rozwiązywanie tego typu zadań i nie będziemy się bardzo dziwić, że tak mało uczniów radzi sobie z nimi, skoro uczenie się dowodzenia sprowadzono do około dwóch lat na III etapie kształcenia.

7. Testy zbierające

Testy zbierające powinny być prowadzone jak zwykle na zakończenie projektu, chociaż pojedyncze zadania na dowodzenia powinny pojawiać się wcześniej na zwykłych sprawdzianach. Test podsumowujący projekt powinien składać się wyłącznie z zadań typu „udowodnij”. Powinny być wśród nich zadania wcześniej rozwiązywane także na pierwszym etapie, na którym ten typ zadań niewiele różnił się od zadań na obliczanie (liczymy na efekt „znajomości”), jak i zadania nowe, ale typowe zadania na dowodzenie, wymagające niewielkiej liczby kroków oraz bardziej złożone, w których trzeba skorzystać z twierdzeń. Nie może zabraknąć dowodów, w których uczniowie będą korzystać z twierdzenia Pitagorasa oraz twierdzenia o równości kątów wierzchołkowych.

Podsumowanie

W naszym nauczaniu od lat utrwalił się rozłączny podział na zadania na obliczanie i zadania na dowodzenie, tymczasem oba typy zadań łączy bardzo dużo istotnych wspólnych cech. Warto dobrze określić te cechy. Z pewnością będzie to miało wpływ na poprawę efektów w obu ważnych zakresach wymagań:

- rozwiązywanie zadań matematycznych, w których co prawda nie trzeba nic udowadniać zadającemu zadanie, za to wciąż trzeba udowadniać sobie, że rozwiązanie jest prawidłowe;

- rozwiązanie zadań na dowodzenie, które nie będą już traktowane jako obce, inne i nowe, a przez to trudne, bo niepodobne do zadań, które wcześniej były rozwiązywane, będą zaś traktowane jak zadania rozwiązywane wcześniej, a przy tym bardzo podobne do zadań bez słów typu „uzasadnij” w treści.

Aby dystans pomiędzy obydwoma typami zadań był coraz mniejszy, trzeba:

- kształcić nawyki samodzielnego sprawdzania rozwiązań zadań obliczeniowych,

- przekonać uczniów, że zadanie obliczeniowe jest rozwiązane do końca wyłącznie wtedy, gdy dokonali sprawdzenia tego rozwiązania (przeprowadzili dowód poprawności rozwiązania, czyli dowód zgodności wyniku z warunkami zadania, nie zaś wyłącznie dowód poprawności obliczeń);

- budować w uczniach napięcie między nieprzyjemnym poczuciem nieufności do własnych rozwiązań oraz miłym poczuciem wewnętrznej pewności, że w rozwiązaniu nie ma błędu.

Bibliografia

Covey S.R., (2006), *7 nawyków skutecznego działania*, Poznań: Rebis.

Covey S.R., (1998), *Najpierw rzeczy najważniejsze*, Konstancin-Jeziorna: Medium.

Covey S.R., (1997), *Zasady działania skutecznego przywódcy*, Konstancin-Jeziorna: Medium.

Gagne R.M., Brigs L.J., Wagner W.W., (1992), *Zasady projektowania dydaktycznego*, Warszawa: WSiP.

Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, (2017), [online, dostęp dn. 13.10.2017, pdf. 3,9 MB].

Sprawozdanie z egzaminu maturalnego: Matematyka, (2017),CKE.

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny